Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Е.В. Хорошилова

СЕМИНАРЫ

ПО КУРСУ "ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ"

Для студентов 2-го курса
Факультета мировой политики МГУ

Москва–2017

Рекомендованная литература:

Материалы лекций и данная брошюра, а также следующие источники.

Учебники:

[1]. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающимся по экономическим специальностям /Н.Ш. Кремер и др. Под ред. Н.Ш. Кремера. 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 479с.

[2]. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов. – 7 изд. стер. – М.: Высш. шк. – 2005. – 479 с.

[3]. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. Учебник. – М.: ООО «ТК Велби», 2002. – 592 с.

Задачники:

[4]. Практикум по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие для вузов /Кремер Н.Ш., Тришин И.М., Путко Б.А. и др. /Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 423 с.

[5] Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. пособ. для студентов высш. учеб. завед. – 3-е изд. – М.: Высш. шк., 2003. – 304 с.

Дополнительный список литературы:

[6]. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Гуманитариям о математике. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели: Учебник. Изд. 4-е, доп. М.: ЛЕНАНД, 2015. – 292с.

[7]. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. Учеб. пособие. – 3-е изд. – М.: Дело, 2004. – 440с. (Сер. «Классический университетский учебник»)

[8]. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. – 6-е изд., испр. и доп. /Под. общ. ред. С.С. Герштейна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 520с.

[9]. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М.: МЦНМО, 2000. – 32с.

[10]. Босс В. Интуиция и математика. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Изд-во ЛКИ. – 2008. – 216с.

[11]. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов: Учебное пособие для высших учебных заведений. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Логос, 2001. – 296с.

[12]. Земляков А.Н. Математический анализ реальности. Дифференциальные уравнения для школьников. – М.: МЦНМО, 2013. – 360с.

[13]. Шумов В.В. Модели пограничного сдерживания. – М.: ЛЕНАНД, 2012. – 200с.

[14]. Акимов В.П. Математика для политологов: учеб. пособие. Моск. гос. ин-т междунар. отношений (университет) МИД России. Каф. математ. методов и информационных технологий. – 2-е изд. доп. – М.: МГИМО–Университет, 2011–210с.

[15]. Клима Р.Э., Ходж Дж.К. Математика выборов. – М.: МЦНМО, 2007. – 224с.

Задачи для семинарских и домашних занятий подготовлены автором с использованием задачников Кремера Н.Ш. [4], Шипачёва В.С. [5] и других источников.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ. Что даёт любому из нас изучение математики в юности?

«Разве ты не заметил, что способный к математике изощрён во всех науках в природе?»
Платон (428—348 до н.э.) — древнегреческий философ, ученик Сократа, учитель Аристотеля.

Просто запомните это сейчас. Со временем у Вас появится возможность осознать, проверить на собственном опыте и – не поверите – в подавляющем большинстве случаев с этим согласиться.

Итак, о чём же говорят мудрые люди – прислушайтесь!

1) Математика учит мыслить логически, осознанно и ясно.

2) Математика учит подходить к информации системно, структурировать материал.

3) Математика учит человека терпению, концентрации внимания и последовательности.

4) Математика учит правильно подходить к планированию.

5) Математика развивает абстрактное мышление, учит обобщать и видеть закономерности.

6) Математика облагораживает и воспитывает человека, приучает к дисциплине.

7) Особо следует сказать для школьников и студентов гуманитарной направленности: не заблуждайтесь, математика нужна вам! Она нужна не сама по себе (об этом вы догадываетесь), а как необходимое средство формирования вашего интеллекта, крайне полезных в будущем навыков для вашего развития. Как катализатор достижения успеха в вашей специальности и любом виде творчества (это осознают со временем многие успешные люди, достигшие высот в своей совсем нематематической профессии). Изучение математики – отличная гимнастика вашего ума!

Пройдут годы, и наступит момент, когда каждый из вас, кто – со вздохом, кто – с улыбкой, а кто – с гордостью, скажет: «А ведь у меня была в жизни возможность прикоснуться к тайнам высшей математики!» Не упустите время.

Е.В. Хорошилова

ПЛАНЫ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

«В науках упражняйся, гони ума спокойствие,
Науки доставляют сладость удовольствия».
Пифагор Самосский (570 *до н.э.*– 490 *до н.э.*)

1 СЕМИНАР: Формулы сокращённого умножения. Бином Ньютона. Известные неравенства. Способы доказательства

МАТЕРИАЛЫ К СЕМИНАРУ. Прочитайте и запомните основное.

Раздел: Элементарная алгебра.[1]

1.1 Формулы сокращённого умножения. Бином Ньютона

Приведённые в этом разделе алгебраические тождества и неравенства пополняют хорошо известный из средней школы список формул сокращённого умножения многочленов ($a, b \in \mathbb{R}$):

1. Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
2. Квадрат суммы (разности): $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
3. Разность (сумма) кубов: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
4. Куб суммы (разности): $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$.

1.1.1 Формула квадрата $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$ суммы n чисел

Для любых $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $n \geq 2$, справедлива формула для возведения в квадрат суммы n чисел:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \underbrace{2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + ... + 2a_{n-1} a_n}_{\text{удвоенные попарные произведения}}$$

[1] *Алгебра* – раздел математики, посвящённый изучению операций над элементами множеств произвольной природы, обобщающий обычные операции сложения и умножения чисел. Различают *элементарную алгебру*, *общую (абстрактную) алгебру*, *линейную алгебру*, *алгебраическую комбинаторику*.

Пример 1. $(a+b-c-d)^2 =$
$$= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd.$$

1.1.2 Формула разложения на множители разности $a^n - b^n$ $(n \in \mathbb{N})$

Для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ справедливо разложение на множители разности натуральных степеней двух чисел:[1]

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Эта формула обобщает известные формулы разности квадратов и разности кубов.

Пример 2. Например,
$$x^7 - 1 = (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1).$$

1.1.3 Формула разложения на множители суммы нечётных степеней $a^n + b^n$ $(n = 2k+1)$

Для произвольных $a, b \in \mathbb{R}$, $n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{N})$, справедливо разложение на множители суммы нечётных степеней двух чисел[1]:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Пример 3. Например,
$$x^7 + 1 = (x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1).$$

1.1.4 Формула разложения на множители разности чётных степеней $a^n - b^n$ $(n = 2k)$

Для произвольных $a, b \in \mathbb{R}$, $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$, справедливо тождество[1]:

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

Пример 4. Например,
$$x^8 - 1 = (x+1)(x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1).$$

1.1.5 Бином Ньютона $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Для произвольных $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, справедливо тождество

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

[1] Доказывается непосредственным раскрытием скобок.

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ...$$

$$+ C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + ...$$

$$+ \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + ... + n a b^{n-1} + b^n.$$

Здесь C_n^k – биномиальные коэффициенты, которые находятся по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i, \quad 0! = 1.$$

В частности, $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$,

$$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!}, \ C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Справедливы свойства биномиальных коэффициентов:

$C_n^k = C_n^{n-k}$, где $0 \le k \le n$ (*правило симметрии*),

$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$, где $1 \le k \le n$ (*правило Паскаля*).

1.2 Средние величины. Известные неравенства

1.2.1 Неравенство о сумме взаимно обратных чисел $\left|a + \frac{1}{a}\right| \ge 2$ $(a \ne 0)$

1. *Неравенство о сумме двух взаимно обратных положительных чисел.* Если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \ge 2$, причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = 1$. (В частности, для любых $a, b > 0$ имеем $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$).

2. *Неравенство о сумме двух взаимно обратных отрицательных чисел.* Если $a < 0$, то $a + \frac{1}{a} \le -2$, причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = -1$.

3. *Неравенство о сумме двух взаимно обратных чисел.* Если $a \ne 0$, то $\left|a + \frac{1}{a}\right| \ge 2$, причём равенство достигается только при $|a| = 1$.

1.2.2 Тождества и неравенства с модулем

Тождества. При всех $x, y \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения:

1. $|x| = |-x|$; **2**. $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$, но $\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x$;

3. $|x|^2 = x^2$; **4**. $|xy| = |x||y|$;

5. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$; **6**. $|x| = \max(x; -x)$; **7**. $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$,

где $\max(a, b)$ – наибольшее из двух чисел a и b; функция «сигнум» (знак числа), относящаяся к неэлементарным функциям, определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, используя функцию сигнум, можно упростить выражения $\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$ или $\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$, записав их при $\sin x \neq 0$ в виде $\operatorname{sgn}(\sin x)$.

8. При решении задач с модулем действительного числа полезными могут оказаться тождественные преобразования

$$|x| + |y| = x + y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

$$|x| + |y| = x - y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$$

Неравенства. При всех $x, y \in \mathbb{R}$ справедливы следующие неравенства:

1. $|x| \geq x$, причём $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$;
$|x| \geq -x$, причём $|x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0$.

2. $|x - y| \geq ||x| - |y||$, причём $|x - y| = ||x| - |y|| \Leftrightarrow xy \geq 0$.

3. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется $|xy| \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$.

4. *Неравенство треугольника.* Для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \text{ причём } |x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

5. (Обобщение неравенства треугольника: *неравенство многоугольника*). Для любых действительных чисел x_i, $i = \overline{1, n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$, модуль суммы не превышает суммы модулей:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда все числа x_i имеют один знак (все неотрицательны или, наоборот, все неположительны).

6. Примеры равносильных преобразований:

$$|f(x)| = |g(x)| \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{array}\right.$$

$$|f(x)| \geq g(x) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x); \end{array}\right.$$

$$|f(x)| \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; -g(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

1.2.3 Среднее степенное $\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}$ и его свойства

Пусть даны n положительных действительных чисел x_i. Наиболее известны следующие их средние величины:

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{(среднее арифметическое)},$$

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \quad \text{(среднее геометрическое)},$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \quad \text{(среднее гармоническое)},$$

$$S_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \quad \text{(среднее квадратичное)}.$$

Обобщением указанных понятий средних величин является понятие *среднего степенного порядка* p ($p \in \mathbb{R}$). Определим среднее степенное для чисел $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, при $p \neq 0$:

$$V_p(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p = 0$ по определению $V_0 = \lim\limits_{p \to 0} V_p$.

В частности, при $p = -1$ имеем $V_{-1} = H_n$ (среднее гармоническое), при $p = 0$ получим $V_0 = G_n$ (среднее геометрическое), при $p = 1$ имеем $V_1 = A_n$ (среднее арифметическое), а при $p = 2$ получим $V_2 = S_n$ (среднее квадратичное).

Величина V_p при любом p обладает свойствами:

1) $\min(x_1, x_2, ..., x_n) \leq V_p \leq \max(x_1, x_2, ..., x_n)$, где через $\min(\cdot)$ и $\max(\cdot)$ обозначены, соответственно, наименьшее и наибольшее из чисел $x_1, x_2, ..., x_n$.

2) Функция V_p является неубывающей по переменной p и, в частности, $H_n \leq G_n \leq A_n \leq S_n$, причём все неравенства одновременно обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

3) $\lim\limits_{p \to -\infty} V_p(x_1, ..., x_n) = \min(x_1, ..., x_n)$, $\lim\limits_{p \to +\infty} V_p(x_1, ..., x_n) = \max(x_1, ..., x_n)$.

1.2.4 Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$,

Из свойства монотонности среднего степенного, в частности, следует, что для любых действительных чисел $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, справедливо *неравенство Коши*[1]:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n},$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

1.2.5 Неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \geq \dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$.

Для любых положительных действительных чисел x_i, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}.$$

1.2.6 Неравенство Коши-Буняковского $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$

Для любых чисел $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, справедливо неравенство[2]:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда числа x_i и y_i пропорциональны, т.е. существует такое число $t \neq 0$, что $x_i = t \cdot y_i$, $i = \overline{1,n}$, или же все x_i (или все y_i) одновременно равны нулю.

Пример 5. Пусть $a+b+c=1$. Доказать неравенство:

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}.$$

[1] *Коши Огюстен Луи* (1789–1857) – французский математик, работавший, главным образом, в области математического анализа (дифференциальные уравнения, теория рядов) и теории функций комплексного переменного. Член Парижской Академии наук, почетный член Петербургской АН.

[2] *Буняковский Виктор Яковлевич* (1804–1889) – русский математик, академик, член Петербургской АН.

В самом деле, по неравенству Коши-Буняковского имеем:

$$1 = 1 \times a + 1 \times b + 1 \times c \le \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \ \Box$$

1.2.7 Неравенства Бернулли $(1 + x)^n \ge 1 + nx$

1. Пусть x_i, $i = \overline{1, n}$, – действительные числа одного знака, большие (-1). Тогда справедливо неравенство[1]:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \ge 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

2. В частности, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$ $(x > -1)$ получаем классическое неравенство Берну́лли $(n \in \mathbb{N})$:

$$(1 + x)^n \ge 1 + nx,$$

которое обращается в равенство только при $x = 0$ или $n = 1$.

3. Обобщение последнего неравенства на случай произвольного действительного показателя степени: $\forall x, r \in \mathbb{R}$, $x > -1$, $r \ne 0$, $r \ne 1$, справедливы неравенства Бернулли

$$(1 + x)^r \le 1 + rx, \quad \text{если } 0 < r < 1,$$

$$(1 + x)^r \ge 1 + rx, \quad \text{если } r \notin [0, 1],$$

причём неравенства обращаются в равенства $\Leftrightarrow x = 0$.

1.3 Методы доказательства математических утверждений

Обратимся к различным методам доказательства утверждений в математике. К основным методам относятся: метод импликаций (переход к следствию), метод необходимого и достаточного (переход к равносильному утверждению), доказательство «от противного» и метод математической индукции (используется в задачах, зависящих от натурального параметра n, в тех случаях, когда требуется доказать справедливость утверждения сразу при всех натуральных n, начиная с некоторого заданного n_0).

Поскольку переход к следствию или равносильному утверждению достаточно подробно изучаются в средней школе, то остановимся подробнее на двух методах: математической индукции и доказательству «от противного».

[1] *Бернулли Якоб* (1654–1705) – швейцарский ученый, профессор Базельского университета. Известен своими работами по дифференциальной геометрии, вариационному исчислению и математической физике.

1.3.1 Метод математической индукции

Раздел: Математическая логика (теория доказательств).[1]

«Пусть в очереди первой стоит женщина, и за каждой женщиной пусть стоит женщина. Тогда все в очереди – женщины!»
(Шутливая формулировка принципа математической индукции)

Метод математической индукции впервые, как это принято считать, был разработан французским философом, математиком и физиком Блезом Паскалем (Blaise Pascal, 1623–1662), а выражение «математическая индукция» впервые употребил английский математик А. Де Морган (Augustus De Morgan, 1806–1871). С тех пор этот метод широко применяется в математике для доказательства самых разнообразных тождеств, неравенств и других утверждений.

Чтобы доказать методом математической индукции, что некоторое утверждение, зависящее от натурального n, верно для любого $n \geq n_0$, надо сделать следующее.

1. Убедиться в справедливости утверждения для начального значения $n = n_0$ (*базис индукции*).

2. Пусть $k \geq n_0$ – произвольное натуральное число. Предполагая справедливость данного утверждения при $n = k$ (*предположение индукции*), устанавливается справедливость утверждения для следующего за ним значения $n = k + 1$ (*индукционный шаг*).

3. *Вывод.* Так как утверждение верно при $n = n_0$, то в силу доказанного в предыдущем пункте оно будет верно при следующем значении, т.е. $n = n_0+1$. Из справедливости утверждения при $n = n_0+1$ вытекает по доказанному в пункте 2 выполнение утверждения при следующем значении $n = n_0+2$. Аналогично рассуждая, получаем, что если утверждение верно при $n = n_0 + 2$, то оно будет верно и при $n = n_0 + 3$ и так далее. Окончательно получаем, что доказываемое утверждение выполняется сразу для всех натуральных $n \geq n_0$.

Кратко сформулировать принцип математической индукции можно следующим образом. Пусть имеется последовательность утверждений $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$, и пусть первое утверждение Y_1 верно, и мы умеем доказать, что из верности утверждения Y_k следует верность Y_{k+1}. Тогда все утверждения в этой последовательности верны.

[1]Математическая логика изучает основания математики, принципы построения математических теорий, способы доказательства математических суждений.

Пример 6. Доказать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо тождество
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Доказательство. 1. Базис индукции: при $n = 1$ имеем
$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \text{ – верно.}$$

2. Предположим, что тождество справедливо при $n = k$:
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
и докажем, что тогда оно выполняется для $n = k + 1$, т.е.
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$
Начиная с левой части последнего тождества, придём к правой:
$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$
$$= (k+1)\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

3. Из пунктов 1 и 2 вытекает, что тождество справедливо при всех натуральных n.

Пример 7. Доказать, что при любом натуральном $n \geq 3$ справедливо неравенство $2^n > 2n + 1$.

Доказательство. При $n = 3$ имеем $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$ – верно. Предположим, что неравенство выполняется при некотором $n = k$ (т.е. $2^k > 2k+1$ – предположение индукции) и докажем, что тогда оно будет верно и при $n = k+1$ (т.е. $2^{k+1} > 2(k+1)+1$). Действительно, выпишем левую часть доказываемого при $n = k + 1$ неравенства и воспользуемся предположением индукции:
$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k+1).$$
Достаточно доказать теперь, что $2(2k+1) > 2k+3$ при $k \geq 3$. В этом несложно убедиться: упростив это неравенство, мы получим $2k > 1$, что верно при $k \geq 3$. Тогда из последних двух неравенств по свойству транзитивности следует доказываемое неравенство.

Пример 8. Доказать, что при любом натуральном n выражение $n^3 + 11n$ делится нацело на 6.

Доказательство. При $n = 1$ имеем $1^3 + 11 = 12 \,\vdots\, 6$ – верно. Предположим, что данное выражение кратно 6 при некотором $n = k$ и докажем, что тогда оно будет кратно 6 и при $n = k + 1$. В самом деле, рассмотрим выражение при $n = k + 1$:
$$(k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = (k^3 + 11k) + (3k^2 + 3k) + 12 =$$
$$= (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12.$$
Здесь выражение в первых скобках делится на 6 по предположению индукции, выражение $3k(k+1)$ делится на 3, а также на 2 (поскольку из двух последовательных целых чисел k и

$k+1$ одно обязательно чётное), а значит, и на 6. Наконец, число 12 также делится нацело на 6. Но тогда сумма трёх чисел, каждое из которых кратно 6, тоже кратна шести.

1.3.2 Доказательство «от противного»

Доказательство «от противного» (лат. *contradictio in contrarium*) в математике – один из часто используемых методов доказательства утверждений. Доказательство от противного – это вид доказательства, при котором «доказывание» некоторого суждения (назовём его *тезисом*) осуществляется через опровержение отрицания этого суждения – *антитезиса*. Этот способ доказательства основывается на истинности законе двойного отрицания в классической логике.

Схема доказательства. Доказательство утверждения A проводится следующим образом. Сначала принимают предположение, что утверждение A неверно, а затем доказывают, что при таком предположении было бы верно некоторое утверждение B, которое заведомо неверно. Полученное противоречие показывает, что исходное предположение было неверным, и поэтому неверно утверждение «не-A» («отрицание» A), которое по закону двойного отрицания равносильно утверждению A.

Пример 9. Врач, убеждая пациента в том, что тот не болен гриппом, может рассуждать следующим образом: «Если бы вы действительно были больны гриппом, то у вас была бы повышена температура, был заложен нос и т. д. Но ничего этого нет. Следовательно, нет и гриппа».

Пример 10. Доказать иррациональность числа $\sqrt{2}$.

Доказательство (от противного). Допустим противное: $\sqrt{2}$ рационален, то есть представляется в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное. Возведём предполагаемое равенство в квадрат:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}, \quad \text{откуда } m^2 = 2n^2.$$

Отсюда следует, что m^2 чётно, значит, чётно и m; следовательно, $m = 2k$. Подставим в последнее равенство: $(2k)^2 = 2n^2$ и после сокращения на 2 получаем, что $n^2 = 2k^2$. Аналогичными рассуждениями о делимости приходим к чётности n, т.е. $n = 2l$. Но тогда дробь $\dfrac{m}{n}$ будет сократима на 2, что противоречит несократимости этой дроби. Значит, исходное предположение было неверным, и $\sqrt{2}$ – иррациональное число.

1.4 Повторение: тригонометрические формулы

Тригонометрические *синус* и *косинус* действительного числа x определяются, соответственно, как ордината и абсцисса точки, отвечающей на тригонометрической окружности единичного радиуса числу x, выраженному в радианах.

Простейшие тригонометрические уравнения:

1. $\sin x = a \ (|a| \le 1) \quad \Leftrightarrow \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$
2. $\cos x = a \ (|a| \le 1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$
3. $\operatorname{tg} x = a \ (a \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$
4. $\operatorname{ctg} x = a \ (a \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Уравнения вида:

$$\sin A = \sin B \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} A = B + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ A = \pi - B + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\cos A = \cos B \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} A = B + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ A = -B + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B \ \Leftrightarrow \ A = B + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \ \ (\cos A \ne 0);$$

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} B \ \Leftrightarrow \ A = B + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \ \ (\sin A \ne 0).$$

Основные тригонометрические формулы. Приведём основные тригонометрические соотношения и покажем, как они доказываются.

1. Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

непосредственно следует из определений синуса и косинуса x и теоремы Пифагора. Вместе с тем, оно легко доказывается с помощью следующих рассуждений: производная функции $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ тождественно равна нулю на всей числовой оси (убедитесь в этом!), что означает, что $f(x)$ – постоянная функция. Чтобы найти её единственное значение, достаточно подставить любое x, например, $x = 0$: $f(x) \equiv f(0) = 1$.

2. Формулы[1]

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

при допустимых x легко доказываются приведением слагаемых в левых частях к общему знаменателю с последующим применением основного тригонометрического тождества.

[1]Во всех формулах следует учитывать ОДЗ.

3. Формулы сложения

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}.$$

Первые две формулы рекомендуется помнить наизусть. Формула сложения для котангенса доказывается в одну строку (для тангенса – аналогично):

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}.$$

Поделив числитель и знаменатель дроби на $\sin x \sin y \neq 0$, получим желаемый результат: $\dfrac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x}$.

4. Формулы двойного и тройного аргументов:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Докажем, например, формулу синуса тройного аргумента:

$$\sin 3x = \sin(x + 2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x =$$

$$= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2 \sin x \cos^2 x =$$

$$= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x(1 - \sin^2 x) = 3\sin x - 4\sin^3 x. \ \square$$

5. Формулы универсальной подстановки:

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Доказательство. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \dfrac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$. Поделив затем числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 x$, получим доказываемое. Заметим, что ОДЗ левой и правой частей – разные. Вторая формула доказывается аналогично. $\square$

6. Формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

(получаются из формул $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$);

$$\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}, \ \cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4};$$

$$\sin^4 x = \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8}, \ \cos^4 x = \frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8}.$$

7. Формулы
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}.$$
Продемонстрируем доказательство на примере одной из них:
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}. \ \square$$

8. Формулы суммы и разности синусов (косинусов):
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}.$$
Докажем первую формулу. Сложив два тождества
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
получим: $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$. Обозначим $x=\alpha+\beta$, $y=\alpha-\beta$, откуда $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$. Осталось перейти в тождестве к x и y. $\square$

9. Формулы преобразования произведений синусов и косинусов в суммы (разности):
$$\sin x\cos y = \tfrac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)),$$
$$\sin x\sin y = \tfrac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)),$$
$$\cos x\cos y = \tfrac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)).$$
Выведем последнюю из них. Сложив две формулы
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$
сразу получим требуемое: $\cos(x-y)+\cos(x+y) = 2\cos x\cos y$. $\square$

10. Тождества
$$\sin(x+\pi n) = (-1)^n\sin x \quad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z});$$
$$\cos(x+\pi n) = (-1)^n\cos x \quad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}).$$
В частности, из последнего тождества при $x=0$ получим:
$$\cos(\pi n) = (-1)^n \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

Для доказательства достаточно рассмотреть случаи чётного и нечётного n.

11. Метод введения вспомогательного аргумента:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

где $\varphi=\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Отсюда, в частности, получаем оценку:

$$|a\sin x+b\cos x|\leq\sqrt{a^2+b^2}.$$

1.5 Повторение: логарифмические формулы

Пусть $a>0$, $a\neq 0$ и $b>0$ – действительные числа. Тогда *логарифмом числа b по основанию a* называется показатель степени, в которую следует возвести число a, чтобы получить число b, т.е.

$$a^{\log_a b}=b\quad\text{(основное логарифмическое тождество).}$$

Иными словами, если $x=\log_a b$, то, потенцируя по основанию a, получим $a^x=b$, и наоборот, логарифмируя последнее равенство по основанию a, приходим к исходному равенству $x=\log_a b$ (потенцирование и логарифмирование по одинаковому основанию являются взаимно обратными операциями). Если $a=10$, то логарифм называется десятичным ($\lg b$), если $a=e$ – натуральным ($\ln b$). Здесь число $e=2,718281828459045...$ есть предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to+\infty$, и в то же время сумма числового ряда

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$

Свойства логарифмов.

1. $\log_a 1=0$ ($a>0$, $a\neq 1$) (логарифмический нуль).

2. $\log_a a=1$ ($a>0$, $a\neq 1$) (логарифмическая единица).

3. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ ($a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$) (логарифм произведения).

Доказательство. Пропотенцируем[1] равенство по основанию a и воспользуемся основным логарифмическим тождеством и свойством степеней $a^{p+q}=a^p\cdot a^q$:

[1] *Пропотенцировать* равенство $A=B$ *по основанию* C ($C>0$, $C\neq 1$) означает перейти к равенству $C^A=C^B$ (равносильное преобразование в силу строгой монотонности показательной функции $y=a^x$).

$$a^{\log_a (bc)} = a^{\log_a b + \log_a c} \ \Leftrightarrow\ bc = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} \ \Leftrightarrow\ bc = bc.$$

4. $\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0)$ (логарифм частного).

5. $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0, \alpha \neq 0)$ (степень основания).

Для доказательства достаточно пропотенцировать данное равенство по основанию a^α:

$$(a^\alpha)^{\log_{a^\alpha} b} = (a^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\log_a b} \quad \Leftrightarrow \quad b = b.$$

6. $\log_a (b^\alpha) = \alpha \log_a b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$ (логарифм степени).

В самом деле, пропотенцируем равенство по основанию a:

$$a^{\log_a (b^\alpha)} = a^{\alpha \log_a b} \quad \Leftrightarrow \quad b^\alpha = (a^{\log_a b})^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad b^\alpha = b^\alpha.$$

7. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1)$ (переход к новому основанию). В частности, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Для доказательства перепишем равенство в виде $\log_c b = \log_c a \cdot \log_a b$ и пропотенцируем затем по основанию c:

$$c^{\log_c b} = c^{\log_c a \cdot \log_a b} \ \Leftrightarrow\ b = \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b} \ \Leftrightarrow\ b = a^{\log_a b} \ \Leftrightarrow\ b = b.$$

8. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1)$.

Для доказательства достаточно прологарифмировать равенство по основанию c и затем вынести показатели степеней из-под знаков логарифма:

$$\log_c \left(a^{\log_c b}\right) = \log_c \left(b^{\log_c a}\right) \ \Leftrightarrow\ \log_c b \cdot \log_c a = \log_c a \cdot \log_c b \text{ – верно.}$$

9*. $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$ $(a > 0,\ b > 0,\ \log_a b > 0)$.

Доказательство следует из цепочки равенств:

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\log_b a \sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a (\log_b a \log_a b)}} = b^{\sqrt{\log_b a}}.$$

11. Потенцирование и логарифмирование неравенств. Пусть $b > 0$, $c > 0$, тогда

$$\text{если } a > 1, \text{ то } \log_a b > \log_a c \quad \Leftrightarrow \quad b > c,$$
$$\text{если } 0 < a < 1, \text{ то } \log_a b > \log_a c \quad \Leftrightarrow \quad b < c.$$

Это означает, что при потенцировании неравенства (как и при его логарифмировании) по основанию $a > 1$ его знак сохраняется, а при потенцировании (логарифмировании) по основанию $0 < a < 1$ знак в неравенстве меняется на противоположный.

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 1.

Как выполнять домашнее задание. *Вы читаете условие задачи и пробуете её решить. Если вы испытываете сложности, то можете заглянуть в решение и разобрать его. Никогда не пытайтесь сразу смотреть в решение, если хотите получить положительный эффект! Если остались вопросы, спросите у вашего преподавателя. Перед решением задач рекомендуется прослушать лекцию по соответствующему разделу, а затем прочитать её конспект, предложенный лектором. При желании (необходимости) используйте и другие надёжные источники информации.*

№1. Запишите бином Ньютона в компактной и развёрнутой формах, а также формулу для вычисления биномиальных коэффициентов.

Треугольник Паскаля состоит из биномиальных коэффициентов $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$. Любой коэффициент внутри треугольника равен сумме двух коэффициентов, стоящих над ним. Во второй строке треугольника ($n = 1$) стоят коэффициенты C_1^0, C_1^1 для формулы $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = a + b$, в третьей строке ($n = 2$) мы видим коэффициенты C_2^0, C_2^1, C_2^2 для раскрытия $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$, далее $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ и т.д.:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & ... & & & & &
\end{array}$$

Используя треугольник Паскаля, напишите разложение для $(a+b)^5$. Найдите сумму всех биномиальных коэффициентов.

№2. Используя формулу квадрата суммы нескольких чисел из п. 1.1.1, раскройте квадрат: $(a+b-c+d)^2$.

№3. Используя формулы сокращённого умножения из п.п. 1.1.2–1.1.4, разложите на множители выражения: а) $x^5 - 2^5$; б) $x^5 + 3^5$; в) $x^6 - y^6$.

№4. Сравните два числа, выделив полный квадрат под корнем в первом из чисел:

$$\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}} \text{ и } \sqrt{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}.$$

№5. Найдите НОД$(42, 18)$ и НОК$(42, 18)$, где НОД и НОК означают, соответственно, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

№6*. Найдите НОД$(n^2+10n+21, n^2+9n+18)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Указание: разложите квадратные трёхчлены на линейные множители, а далее воспользуйтесь свойствами НОД(nm, nk)=n·НОД (m, k) (т.е. общий натуральный делитель n можно вынести из-под знака НОД) и НОД$(n, n+1)$=1 (два последовательных натуральных числа n и $n+1$ всегда являются взаимно простыми, т.е. имеют единственный общий натуральный делитель – единицу).

№7. Докажите, что среднее геометрическое двух положительных чисел есть в то же время среднее геометрическое их среднего арифметического и среднего гармонического.

№8. Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (неравенство Коши), найдите наименьшее значение функции. При каких оно достигается?

$$\text{а) } f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}, \quad \text{б) } f(x) = x^2 + \frac{1}{3x^6} \ (x \neq 0).$$

Решение. а) Воспользуемся следствием из неравенства Коши для 2-х чисел $a+b \geq 2\sqrt{ab}$: $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x^4} \geq 2\sqrt{x^4 \cdot \frac{1}{x^4}} = 2$, причём значение 2 достигается тогда и только тогда, когда $a = b$, т.е. когда $x^4 = \dfrac{1}{x^4}$, откуда находим $x = \pm 1$.

№9. Известно, что алгебраическое неравенство

$$(a+b+c+d)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

можно доказать, используя неравенство Коши-Буняковского. Для этого достаточно применить неравенство К.-Б. к двум наборам чисел: a, b, c, d и $1, 1, 1, 1$:

$$(a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d \cdot 1)^2 \leq (a^2+b^2+c^2+d^2)(1^2+1^2+1^2+1^2).$$

Вопрос: как выглядит это неравенство в общем случае – для чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ и когда оно обращается в равенство?

№10. Используя неравенство о сумме двух взаимно обратных положительных чисел, найдите наименьшее значение функции и укажите, при каких x оно достигается:

$$\text{а) } y = |\operatorname{tg} x| + |\operatorname{ctg} x|, \quad \text{б) } y = \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^2+x+1}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Решение. а) Оценим значения функции на её области определения ($\sin x \neq 0, \cos x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$):

$$y = |\operatorname{tg} x| + |\operatorname{ctg} x| = |\operatorname{tg} x| + \frac{1}{|\operatorname{tg} x|} \geq 2,$$

причём наименьшее значение, равное 2, достигается тогда и только тогда, когда $|\operatorname{tg} x| = 1$, т.е. $\operatorname{tg} x = \pm 1$, или $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

№11. Используя неравенство Берну́лли из п. 1.2.7, найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{3}} + \sqrt[6]{1 + x}.$$

№12. Не используя метод математической индукции, докажите при всех $n \in N,\ n > 1$ тождество:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

№13. Методом математической индукции докажите при всех $n \in \mathbb{N}$:

а) $|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$ $(a_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n})$;

б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$;

г) $4^n + 15n - 1$ кратно 9.

№14. Докажите, что: а) $|x| = \max(x; -x)$; б) $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$, где функция «сигнум» (знак числа), относящаяся к неэлементарным функциям, определяется как

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ \ \ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

№15. Докажите,что при выполнении условий $|a| < 1$, $|b - 1| < 10$, $|a - c| < 10$ справедливо неравенство $|ab - c| < 20$.

№16. Докажите, что при всех $a, b \in \mathbb{R}$ справедливы тождества, выражающие зависимость наибольшего (наименьшего) из двух чисел a и b от модуля их разности:

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

Используя доказанные тождества, решите уравнение

$$\max(2x, 3 - x) = \min(5 + 2x, 6x).$$

№17. Постройте графики функций: а) $y = [x]$; б) $y = \{x\}$; в) $y = \{\sqrt{x}\}$, где $[x]$ и $\{x\}$, соответственно, целая и дробная части действительного числа x.[1]

№18. Используя метод «от противного», докажите, что не существует наименьшего положительного действительного числа.

№19. Используя метод «от противного», решите следующую задачу. Сто три яблока раздали четырнадцати школьникам. Каждому досталось хотя бы одно яблоко. Показать, что по крайней мере два школьника получили одинаковое количество яблок.

№20. Сформулируйте определения равносильных уравнений, а также того, что одно уравнение является следствием другого. Равносильны ли уравнения: а) $8^{1/x} = 8^2$ и $\sqrt[x]{8} = 8^2$;

б) $\sqrt{x^2(x-1)(x+2)} = 0$ и $|x|\sqrt{(x-1)(x+2)}$?

№21. При каких значениях a неравенство $(x-a)(x-a-2) > 0$ является следствием неравенства $x^2 - 4x + 3 < 0$?

№22. На примере следующей теоремы поясните разницу в понятиях необходимого, достаточного условий, критерия (необходимого и достаточного условия):

Теорема 1. *Для того чтобы два числа x и y могли одновременно являться косинусом и синусом одного и того же угла величины α, необходимо и достаточно, чтобы сумма их квадратов была равна единице.*

Доказательство. 1) Необходимость $(\Rightarrow)$. Если $x = \cos\alpha$ и $y = \sin\alpha$, то, по основному тригонометрическому тождеству, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, т.е. $x^2 + y^2 = 1$.

2) Достаточность $(\Leftarrow)$. Пусть теперь $x^2 + y^2 = 1$. Данное равенство можно преобразовать к эквивалентному виду: $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1$. В соответствии с формулой расстояния между двумя точками плоскости, это означает, что расстояние от точки N с координатами $(x; y)$ до точки $O(0; 0)$ равно единице, т.е. точка N расположена на единичной окружности с центром в начале координат. Радиус-вектор ON этой точки образует с положительным направлением оси абсцисс некоторый угол величины $\alpha \in [0, 2\pi)$. Тогда по определениям тригонометрических функций абсцисса и ордината точки N равны, соответственно, косинусу и синусу α, т.е. нашлось такое α, что $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. *Теорема*

[1] *Целой частью* действительного числа x (обозначение $[x]$) называется наибольшее целое число, не превосходящее x. *Дробной частью* числа x называется, по определению, разность $\{x\} = x - [x]$.

доказана.

№23. Докажите неравенство: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.

№24. Используя метод координат (изобразив на плоскости Oxy графики обоих уравнений и их системы), решите систему:

$$\begin{cases} |x-y|=2, \\ |x|+|y|=4. \end{cases}$$

№25. Решите уравнения и неравенства с модулем:

$$\text{а) } |x-1|=3, \quad \text{б) } |2-x|<3, \quad \text{в) } |2x+1|>3.$$

№26. Решите уравнения и неравенства:

$$\text{а) } |x^2-1|=3, \quad \text{б) } |2-x^3| \leq 3, \quad \text{в) } |2x^2+1|>3.$$

№27. Решите неравенство: а) $1<|x-2|\leq 3$, б) $-1<|2x+1|<5$.

№28. Решите простейшие уравнения и неравенства:

$$\text{а) } x^3=-2, \quad \text{б) } x^4<3, \quad \text{в) } x^2>-1, \quad \text{г) } x^6>0,$$

$$\text{д) } x^5>-3, \quad \text{е) } x^2>5, \quad \text{ж) } \sqrt{1-x}>3, \quad \text{з) } \sqrt[3]{x-1}<2,$$

$$\text{и) } x^{\frac{3}{2}}=5, \quad \text{к) } x^{\frac{2}{3}}=2, \quad \text{л) } \sqrt{x^2}\geq 3, \quad \text{м) } x^{\pi}=4, \quad \text{н) } x^0=1.$$

№29. Решите уравнения и неравенства:

$$\text{а) } x^4=\pi, \quad \text{б) } x^2\geq 5, \quad \text{в) } x^7>-7, \quad \text{г) } x^{82}\geq -\tfrac{1}{2},$$

$$\text{д) } x^{11}\leq -4, \quad \text{е) } x^4<5, \quad \text{ж) } \sqrt{x+1}\leq 2, \quad \text{з) } \sqrt[3]{1-x}>2,$$

$$\text{и) } x^{\frac{2}{5}}=7, \quad \text{к) } x^{\frac{5}{3}}=2, \quad \text{л) } \sqrt[4]{x+1}>1, \quad \text{м) } 3^x>2.$$

№30. Решите неравенства методом интервалов:

$$\text{а) } x^4(1-x^2)\leq 0, \quad \text{б) } \frac{(x-1)^2(x+3)}{x(x-5)^3}\geq 0.$$

№31. При всех a решите уравнение $(a-1)x=2$.

№32. При всех a решите уравнение $(a^2-1)x+1=a$.

№33. При всех a решите неравенство $(a-1)x>-3$.

№34. При всех a решите неравенство $5x-a>ax+3$.

№35. Решите неравенство $\dfrac{1}{x}\leq 2x$.

№36. Решите неравенство $\dfrac{1}{x^2-5x+7}\leq 5x-x^2-5$.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ:

№1. $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$. Для нахождения суммы всех биномиальных коэффициентов в биноме Ньютона следует положить $a = b = 1$:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^k + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

№2. $(a+b-c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac+2ad-2bc+2bd-2cd$.

№3. а) $x^5 - 2^5 = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$;

б) $x^5 + 3^5 = (x+3)(x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81)$;

в) $x^6 - y^6 = (x+y)(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5)$.

№4. *Указание:* $8 + \sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{8} =$

$$= 8 + 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} + 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{1} + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1} = (\sqrt{5}+\sqrt{2}+1)^2.$$

Тогда $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{5}+\sqrt{2}+1$.

№5. НОД$(42, 18)$ = 6·НОД$(7, 3)$. Поскольку 7 и 3 не имеют, кроме 1, общих натуральных делителей, то НОД$(7, 3) = 1$ и получаем окончательно, что НОД$(42, 18) = 6$. Аналогично, вынося общий множитель из-под знака НОК, находим: НОК$(42, 18)$ = 6·НОК$(7, 3)$. Но числа 7 и 3 взаимно просты, поэтому их НОК$(7, 3) = 7\cdot 3 = 21$. Окончательно находим НОК$(42, 18) = 6\cdot 21 = 126$. Существуют и другие способы решения этой задачи.

№6. НОД$(n^2+10n+21, n^2+9n+18)$ =НОД$((n+3)(n+7), (n+3)(n+6)) = (n+3)\cdot$НОД $(n+7, n+6)$. Поскольку числа $n+6$ и $n+7$ взаимно просты (как два последовательных натуральных числа), то НОД$(n+7, n+6) = 1$, и получаем ответ: НОД$(n^2+10n+21, n^2+9n+18) = n+3$.

№7. Задача сводится к проверке тождества: $\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}$.

№8. *Указание*: б) представьте функцию в виде

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x^2 + x^2 + \frac{16^2}{x^6}\right)$$

и затем воспользуйтесь неравенством Коши для 4-х чисел.

№9. $(a_1\cdot 1 + a_2\cdot 1 + ... + a_n\cdot 1)^2 \le (1^2+1^2+...+1^2)(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) = n(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)$, причём обращение в равенство происходит, когда эти числа пропорциональны: $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} = ... = \frac{a_n}{1}$, т.е. когда $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

№10. *Указание.* б) Разделите многочлен, стоящий в числителе дроби, на многочлен в знаменателе дроби:

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^4+2x^3+3x^2+2x+2 & \underline{x^2+x+1} \\
\underline{x^4+x^3+x^2} & x^2+x+1 \\
\quad -\,x^3+2x^2+2x+2 & \\
\quad\quad \underline{x^3+x^2+x} & \\
\quad\quad -\,x^2+x+2 & \\
\quad\quad\quad \underline{x^2+x+1} & \\
\quad\quad\quad\quad 1, &
\end{array}$$

т.е.

$$y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2+x+1}$$

и затем воспользуйтесь неравенством о сумме двух обратных положительных чисел. Для нахождения x, при которых достигается наименьшее значение, воспользуйтесь тем, что $a + \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = 1$ (при $a > 0$).

№11. *Решение.* Наибольшее значение функции ищем на её области определения: $\begin{cases} \frac{x}{3} \le 1, \\ 1 + x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1, 3]$. Применяя неравенство Бернулли к каждому из корней, получаем: $\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + (1 + x)^{\frac{1}{6}} \le \left(1 - \dfrac{x}{6}\right) + \left(1 + \dfrac{x}{6}\right) = 2$, причём равенство достигается при $x = 0$.

№12. *Указание*: воспользуйтесь тождеством $\dfrac{1}{(k-1)\cdot k} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, $k = 2, 3, ..., n$, представляя каждую дробь в виде разности двух дробей. После взаимного уничтожения промежуточных слагаемых, вы приходите к доказываемому тождеству.

№13. а) При $n = 1$ неравенство $|a_1| \le |a_1|$, очевидно, выполняется. При $n = 2$ имеем $|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|$ – также верно. Пусть при некотором произвольном $n \ge 2$ справедливо неравенство $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right| \le \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$. Докажем его справедливость при $n + 1$. В самом деле,

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| + |a_{n+1}| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i| + |a_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|,$$

что и требовалось доказать.

б) При $n = 1$ имеем: $1^3 = \dfrac{1^2 \cdot 2^2}{4}$ – верно. Предположим, что равенство верно при $n = k$, т.е. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$, и докажем его справедливость для $n = k+1$, т.е. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$. Имеем:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4(k+1)) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

в) При $n = 1$ имеем: $1^3 = 1^3$ – верно. Предположим, что равенство верно при $n = k$, т.е. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + k)^2$ и докажем его справедливость для $n = k + 1$:

$$((1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (k+1))^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + k)^2 +$$

$$+2(k+1)(1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (k+1)^2 =$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + 2(k+1)\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)^2 =$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3.$$

г) При $n = 1$ имеем $4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18 \,\vdots\, 9$ – верно. Пусть при $n = k$ выполняется условие делимости $(4^k + 15k - 1) \,\vdots\, 9$. Докажем, что и при $n = k + 1$ оно также будет выполняться, т.е. $(4^{k+1} + 15(k+1) - 1) \,\vdots\, 9$. Действительно,

$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18.$$

Здесь первое слагаемое делится на 9 по предположению индукции, и оставшаяся группа $-45k+18$, очевидно, также кратна 9. Поэтому число $4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ делится на 9, что и требовалось доказать.

№14. а),б) Рассмотрите три случая: $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ и в каждом случае покажите, что левая часть равенства равна правой.

№15. *Указание*: $|ab - c| = |(ab - a) + (a - c)| \le |a(b-1)| + |a - c| = |a||b-1| + |a - c| < 1 \cdot 10 + 10 = 20$.

№16. Для доказательства тождеств рассмотрите два случая $ab \ge 0$ (числа a и b одного знака) $ab < 0$ (a и b разных знаков). Уравнение имеет единственное решение $x = 3/7$.

№17. *Указание.* а),б) Для построения графиков функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$ достаточно рассмотреть промежутки вида $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$. Например, при $0 \leq x < 1$ имеем $[x] = 0$, $\{x\} = x - [x] = x - 0 = x$; при $1 \leq x < 2$ имеем $[x] = 1$, $\{x\} = x - [x] = x - 1$; при $2 \leq x < 3$ имеем $[x] = 2$, $\{x\} = x - [x] = x - 2$; при $-1 \leq x < 0$ имеем $[x] = -1$, $\{x\} = x - [x] = x + 1$ и т.д.

в) Рассмотрите промежутки: $0 \leq \sqrt{x} < 1$, $1 \leq \sqrt{x} < 2$, $2 \leq \sqrt{x} < 3$,..., и на каждом раскройте дробную часть. Например, при $0 \leq x < 1$ имеем $[\sqrt{x}] = 0$ и, следовательно, $\{\sqrt{x}\} = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] = \sqrt{x}$ и т.д.

№18. Предположим, от противного, что наименьшее положительное действительное число существует. Обозначим его $x_{\min}$. Рассмотрим число $x' = \frac{x_{\min}}{2}$. С одной стороны, оно также положительно. С другой стороны, оно меньше, чем $x_{\min}$. Пришли к противоречию с тем, что $x_{\min}$ – наименьшее положительное действительное число. Это означает, что сделанное предположение было неверным. Следовательно, наименьшего положительного действительного числа не существует.

№19. Предположим, от противного, что не найдётся двух школьников, получивших одинаковое количество яблок. Тогда минимальное количество ро́зданных яблок равно $1 + 2 + 3 + ... + 13 + 14 = 105 > 103$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

№20. Два уравнения называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Обозначение: (1) $\Leftrightarrow$ (2). Уравнение (2) называется *следствием* уравнения (1), если все решения уравнения (1) являются решениями уравнения (2). Обозначение: (1) $\Rightarrow$ (2).

а) Нет, первое уравнение является следствием второго. Число $x = 1/2$ является решением первого уравнения, но не является решением второго (во 2-м уравнении ОДЗ: $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$).

б) Нет, первое уравнение является следствием второго. У первого уравнения три решения: $-2; 0; 1$, а у второго лишь два: $-2; 1$.

№21. Решением первого из неравенств является объединение промежутков $(-\infty, a]$ и $[a + 2, +\infty)$, а решением второго – интервал $(1, 3)$. Чтобы первое неравенство было следствием второго, надо чтобы интервал $(1, 3)$ целиком принадлежал одному из указанных промежутков. Это происходит, если $a \geq 3$ или $a + 2 \leq 1$. Ответ: $a \in (-\infty, -1] \bigcup [3, +\infty)$.

№23. *Указание*: умножим на 2 и выделим три полных квадрата $(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + c^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) \geq 0$ и т.д.

№24. *Указание.* Первое уравнение распадается на два уравнения: $x-y=2$ или $x-y=-2$ и определяет две параллельные прямые. Второе уравнение задаёт фигуру, симметричную относительно обеих координатных осей, поэтому достаточно построить её, например, в первой четверти, где $x\geq 0$, $y\geq 0$, а затем отразить симметрично относительно Ox и Oy. Получится квадрат. Решением системы будут координаты точек пересечения прямых с квадратом. Система имеет 4 решения.

№25. *Решение.*

$$\text{а) } |x-1|=3 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x-1=3, \\ x-1=-3; \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-2; \end{array}\right.$$

$$\text{б) } |2-x|<3 \;\Leftrightarrow\; |x-2|<3 \;\Leftrightarrow\; -3<x-2<3 \;\Leftrightarrow\; -1<x<5;$$

$$\text{в) } |2x+1|>3 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} 2x+1>3, \\ 2x+1<-3; \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-2. \end{array}\right.$$

№26. *Решение.* а) $|x^2-1|=3 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x^2-1=3, \\ x^2-1=-3; \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=\pm 2, \\ x\in\varnothing; \end{array}\right.$

$$\text{б) } |2-x^3|\leq 3 \;\Leftrightarrow\; |x^3-2|\leq 3 \;\Leftrightarrow\; -3\leq x^3-2\leq 3 \;\Leftrightarrow$$
$$-1\leq x^3\leq 5 \;\Leftrightarrow\; -1\leq x\leq \sqrt[3]{5};$$

$$\text{в) } |2x^2+1|>3 \;\Leftrightarrow\; 2x^2+1>3 \;\Leftrightarrow\; x^2>1 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1. \end{array}\right.$$

№27. *Решение.*

$$\text{а) } 1<|x-2|\leq 3 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} 1<x-2\leq 3, \\ -3\leq x-2<-1 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} 3<x\leq 5, \\ -1\leq x<1. \end{array}\right.$$

б) $-1<|2x+1|<5 \;\Leftrightarrow\; |2x+1|<5 \;\Leftrightarrow\; -5<2x+1<5 \;\Leftrightarrow\; -6<2x<4 \;\Leftrightarrow\; -3<x<2$.

№28. *Решение.* а) $x=-\sqrt[3]{2}$, б) $-\sqrt[4]{3}<x<\sqrt[4]{3}$, в) $x\in(-\infty,+\infty)$, г) $x\in(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$, д) $x>-\sqrt[5]{3}$, е) $\left[\begin{array}{l} x>\sqrt{5}, \\ x<-\sqrt{5}, \end{array}\right.$ ж) $1-x>9 \;\Leftrightarrow\; x<-8$, з) $x-1<8 \;\Leftrightarrow\; x<9$, и) $x^3=5^2 \;\Leftrightarrow\; x=\sqrt[3]{25}$, к) $x^2=8 \;\Leftrightarrow\; x=\pm\sqrt{8}$, л) $|x|\geq 3 \;\Leftrightarrow\; x\in(-\infty,-3]\bigcup[3,+\infty)$, м) $x=4^{\frac{1}{\pi}}$, н) $x\neq 0$.

№29. *Решение.* а) $x^4=\pi \;\Leftrightarrow\; x=\pm\sqrt[4]{\pi}$;

б) $x^2 \geq 5 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{5}, \\ x \leq -\sqrt{5}; \end{array}\right.$

в) $x^7 > -7 \;\Leftrightarrow\; x > -\sqrt[7]{7}$;

г) $x^{82} \geq -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x \in \mathbb{R}$;

д) $x^{11} \leq -4 \;\Leftrightarrow\; x \leq -\sqrt[11]{4}$;

е) $x^4 < 5 \;\Leftrightarrow\; -\sqrt[4]{5} < x < \sqrt[4]{5}$;

ж) $\sqrt{x+1} \leq 2 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq x+1 \leq 4 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq x \leq 3$;

з) $\sqrt[3]{1-x} > 2 \;\Leftrightarrow\; 1-x > 8 \;\Leftrightarrow\; x < -7$;

и) $x^{\frac{2}{5}} = 7 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 7^5 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{7^5}$;

к) $x^{\frac{5}{3}} = 2 \;\Leftrightarrow\; x^5 = 8 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[5]{8}$;

л) $\sqrt[4]{x+1} > 1 \;\Leftrightarrow\; x+1 > 1 \;\Leftrightarrow\; x > 0$;

м) $3^x > 2 \;\Leftrightarrow\; \log_3(3^x) > \log_3 2 \;\Leftrightarrow\; x > \log_3 2$.

№30. а) $x \in (-\infty, -1] \bigcup \{0\} \bigcup [1, +\infty)$; б) $x \in [-3, 0) \bigcup \{1\} \bigcup (5, +\infty)$.

№31. Это линейное уравнение (уравнение 1-й степени) с параметром a. Если $a - 1 \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{2}{a-1}$. Если же $a - 1 = 0$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 2$ и не имеет решений. Ответ: при $a \neq 1$ $x = \frac{2}{a-1}$; при $a = 1$ решений нет.

№32. Приведём уравнение к стандартному виду: $(a^2 - 1)x = a - 1$.

Если $a^2 - 1 \neq 0$, то $x = \dfrac{a-1}{a^2-1} = \dfrac{1}{a+1}$.

Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$ и его решением будет любое $x \in \mathbb{R}$.

Если же $a = -1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = -2$ и не имеет решений.

№33. Это линейное неравенство. Для его решения рассмотрим три случая.

Если $a > 1$, то решения неравенства образуют промежуток $x > -\frac{3}{a-1}$.

Если $a < 1$, то решениями неравенства будет промежуток $x < -\frac{3}{a-1}$.

Если $a = 1$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x > -3$, что верно при всех действительных x.

№34. $5x - a > ax + 3$ Приведём неравенство к стандартному виду: $(a-5)x < -a-3$ и рассмотрим 3 случая.

Если $a > 5$, то $x < \frac{a+3}{5-a}$; если $a < 5$, то $x > \frac{a+3}{5-a}$. Если $a = 5$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x < -8$ и не имеет решений.

№35. Имеем:

$$\frac{1}{x}-2x\leq 0\ \Leftrightarrow\ \frac{1-2x^2}{x}\leq 0\ \Leftrightarrow\ \frac{x^2-\frac{1}{2}}{x}\geq 0\ \Leftrightarrow\ \frac{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}})}{x}\geq 0.$$

Решая далее неравенство методом интервалов, находим $x\in[-\frac{1}{\sqrt{2}},0)\bigcup[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$.

№36. После замены $t=x^2-5x+7$ неравенство примет вид $\dfrac{1}{t}\leq 2-t\Leftrightarrow \dfrac{t^2-2t+1}{t}\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{(t-1)^2}{t}\leq 0$. Решая последнее неравенство методом интервалов, находим

$$\left[\begin{array}{l}t<0,\\ t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x+7<0,\\ x^2-5x+7=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ x=2,\\ x=3.\end{array}\right.$$

2 СЕМИНАР: Действительные числа. Множества и последовательности действительных чисел

Раздел: Теория действительных чисел.

I. Действительные числа. Определения рационального, иррационального и действительного числа и их основные свойства. Две формы представления рационального числа: в виде обыкновенной и периодической дроби. Модуль действительного числа. (Дополнительно: простые и составные числа. Основная теорема арифметики.)

Раздел: Теория множеств.

II. Множества действительных чисел. Примеры множеств действительных чисел и основных операций над ними. Ограниченные (сверху, снизу, с двух сторон) и неограниченные множества. Точные грани множеств. Внутренние, внешние и граничные точки множества. Граница множества. Изолированная точка множества. Предельная точка. Открытые и замкнутые множества. Выпуклые множества. Мощность множества. Множества счётные и мощности континуум.

Практика: разобрать примеры на свойства действительных чисел и операции над множествами. Предложить студентам привести различные примеры ограниченных и неограниченных, открытых и замкнутых, выпуклых и невыпуклых, счётных и континуальных множеств.

Раздел: Математический анализ: теория числовых последовательностей.

III. Последовательности действительных чисел. Понятие числовой последовательности, её предела. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Монотонные последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Существование предела у монотонной ограниченной последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства пределов последовательностей. 2-й замечательный предел. Вычисление известных пределов.

Практика: разобрать на примерах основные приемы вычисления пределов числовых последовательностей. Решение задач на свойства числовых последовательностей и вычисление пределов.

Контроль знаний: проверка выполнения домашнего задания.

Приёмы вычисления пределов последовательностей.

1. Пределы *дробно-рациональных функций* (в виде отношения двух алгебраических многочленов) в случае неопределённостей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. В этом случае правило «предел отношения равен отношению пределов» не действует.

В некоторых случаях для раскрытия неопределённости надо найти в числителе и знаменателе дроби главные члены, т.е. те члены, которые быстрее других стремятся к ∞ (в случае неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$), или те, которые медленнее других стремятся к нулю (в случае $\frac{0}{0}$) и, произвести сокращение общего множителя. В результате неопределённость пропадает и предел вычисляется.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7n+1}{5n^3-3n+2}$.

Решение. Проанализируем выражение под знаком предела. Заметим, что имеется неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, поскольку при $n\to+\infty$ и числитель, и знаменатель дроби стремятся к бесконечностям. Найдём главный член в числителе (это $7n$), в знаменателе (это $5n^3$) и вынесем за скобку в числителе и знаменателе, соответственно, n и n^3. После этого сократим дробь на общий множитель n:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{7n+1}{5n^3-3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(7+\frac{1}{n})}{n^3(5-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{7+\frac{1}{n}}{n^2(5-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3})}.$$

Проверим, сохранилась ли неопределённость. Устремив $n\to+\infty$, видим, что теперь числитель стремится к 7, а знаменатель, по-прежнему, к ∞. Неопределённость пропала, предел можно вычислить, он оказался равен 0.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3n^4+10n^2-1}{n^2+23n-9}$.

Решение. Устремляя $n\to+\infty$, опять обнаруживаем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Действуя аналогично предыдущему примеру, получаем:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-3n^4+10n^2-1}{n^2+23n-9}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4(-3+\frac{10}{n^2}-\frac{1}{n^4})}{n^2(1+\frac{23}{n}-\frac{9}{n^2})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(-3+\frac{10}{n^2}-\frac{1}{n^4})}{1+\frac{23}{n}-\frac{9}{n^2}}.$$

Теперь хорошо видно, что числитель дроби стремится к $-\infty$, а знаменатель – к 1, поэтому их отношение в пределе равно $-\infty$.

2. *Сведение к известным пределам.* Приведём наиболее известные (табличные) пределы. Это:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1,\ \text{где } x_n\to 0\quad \text{(1-й замечательный предел)},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\quad \text{(2-й замечательный предел)},$$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0, \text{ если } -1 < q < 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0),$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1, k > 0)$$

(это означает, что при $n \to +\infty$ степенна́я функция n^k растёт медленнее показательной функции a^n),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0 \quad (a > 1, k > 0)$$

(т.е. при $n \to +\infty$ логарифмическая функция $\log_a n$ растёт медленнее степенно́й n^k).

3. *Пределы вида* $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n)$, где $x_n \to 0$ (бесконечно малая последовательность), а y_n – ограниченная последовательность.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Решение. Устремляя $n \to +\infty$, замечаем, что выражение $\sin n$ описывает ограниченную последовательность (так как при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие $|\sin n| \leq 1$). При этом, очевидно, $\frac{1}{n} \to 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 2.

Как выполнять домашнее задание. *Вы читаете условие задачи и пробуете её решить. Если вы испытываете сложности, то тогда вы можете заглянуть в решение и разобрать его. Никогда не пытайтесь сразу смотреть в решение, если хотите получить положительный результат! Если остались вопросы, спросите у вашего преподавателя. Перед решением задач рекомендуется прочитать лекцию по соответствующему разделу.*

2.1 Задачи на свойства действительных чисел

№1. Сформулируйте определения рационального, иррационального и действительного числа. Определите, какие из данных действительных чисел являются рациональными числами, а какие – иррациональными числами: $5,424242...$, $0,32375375...$, $1,31301300130001...$, $8,7(20)$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\log_3 5$, $1+\sqrt{3}$, $\pi - 2$?

№2. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом? Может ли произведение двух иррациональных чисел быть рациональным? Может ли произведение рационального и иррационального чисел быть рациональным числом? Приведите примеры.

№3. Используя метод «от противного», докажите, что $\sqrt{3}$ – иррациональное число.

№4. Докажите, что число $\log_2 3$ не является рациональным.

№5. Приведите разные примеры нескольких рациональных и иррациональных чисел, расположенных между $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

№6. Какое из чисел больше: $1,(1234512)$ или $1,(12345)$?

№7. Является данное рациональное число целым или дробным:

$$(4\cdot 10^{2011}-1):(4\cdot\underbrace{33...3}_{2011}+1)?$$

№8. Что больше: а) $4,(9)^{5,(0)}$ или $5,(0)^{4,(9)}$; б) $2\sqrt{17}$ или $8,(24)$; в) $\dfrac{7}{33}$ или $\dfrac{21212121}{99999999}$?

№9. Является ли число иррациональным: а) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5...}}}}$; в) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$?

№10. Решите: а) уравнение $[x+1.5]=-5$; б) неравенство $[x]\cdot\{x\}<x-1$.

№11. Один из корней уравнения $x^2+px+q=0$ равен $1+\sqrt{3}$. Найдите p и q, если известно, что они рациональны.

№12. Решите уравнение, используя свойства модуля:

$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+...+|x-100|+|x+100|=200x.$$

№13. Сформулируйте определения простого и составного числа. Является число простым или составным:

а) $43^{111}+8^{37}$; б) 11111111; в) $100007\cdot 100013\cdot 100001+55$?

№14. Согласно *основной теореме алгебры*, алгебраическое уравнение n-степени всегда имеет ровно n (комплексных) корней. Часть из них (или все) могут быть действительными.

Решите уравнение 8-й степени, найдя все 8 корней:

$$(x-1)^5(x+2)(2x^2+2x+1)=0.$$

№15. Примите к сведению:

Теорема (Ферма). Для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в целых ненулевых числах a, b, c.[1]

2.2 Задачи на множества действительных чисел

№16. Что такое объединение, пересечение и разность числовых множеств? (Сформулировать определения). Найдите: $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A\backslash B$.

$$\text{а) } A = [2,5],\ B = (3,6); \quad \text{б) } A = \{1;4\}\bigcup[5,7),\ B = (3,5).$$

№17. Что такое мощность множества? Что такое счётные множества и множества мощности континуум? Докажите, что интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ имеет ту же мощность, что и множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Приведите примеры счётных множеств, а также множеств, имеющих мощность континуум.

№18. Сформулируйте определение ограниченного множества. Докажите, что множество $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ ограничено.

№19. Найдите точную верхнюю и точную нижнюю грани множеств:

$$\text{а) } X = (2,5]; \text{ б) } X = \{1;4\}\bigcup[5,7),$$
$$\text{в) } X = (-\infty, 8), \text{ г) } X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}.$$

Принадлежат ли точные грани множеству X (т.е. достигаются ли они на каком-нибудь элементе)? Приведите пример числового множества X, в котором $\sup X = \inf X$.

№20. Что такое предельная точка числового множества? Граничная точка? Что такое замыкание множества? (Сформулируйте определения). Найдите множество всех предельных, а также граничных точек интервала (a, b). Какое множество является замыканием этого интервала?

2.3 Задачи на числовые последовательности

№21. Что такое предел числовой последовательности? (Приведите определение). Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{5n^2}$.

Указание. Предварительно преобразуйте сумму в числителе по формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$.

[1] Великая теорема Ферма – одна из самых популярных теорем математики. Её условие формулируется просто, однако доказательство теоремы искали многие математики более трёхсот лет. Доказана в 1994 году Эндрю Уайлсом.

№22. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}$.

№23. Сформулируйте понятие ограниченной (неограниченной) числовой последовательности. Какие из последовательностей являются ограниченными (неограниченными) и почему:

$$\text{а) } \frac{(-1)^n}{n},\quad \text{б) } 2^{-n},\quad \text{в) } -\frac{1}{n^3},\quad \text{г) } \sin n,\quad \text{д) } \sqrt[3]{n},\quad \text{е) } \ln n,$$

$$\text{ж) } \left(\frac{1}{2}\right)^n,\quad \text{з) } \frac{1}{n!},\quad \text{и) } \frac{n}{n+1},\quad \text{к) } (n-5)^2,\quad \text{л) } \{1,-1,1,-1,1,-1,...\}?$$

№24. Что такое возрастающая, убывающая (невозрастающая и неубывающая) последовательность? Монотонная последовательность? Какие из последовательностей в задаче 23) являются возрастающими, убывающими, монотонными?

№25. Что такое бесконечно малая, бесконечно большая последовательность? (Сформулируйте определения). Какие из последовательностей в задаче 23) являются бесконечно малыми (бесконечно большими)?

№26. Что такое сходящаяся (расходящаяся) последовательность? (Сформулируйте определения). Какие из последовательностей в задаче 23) сходятся, а какие расходятся?

№27. Покажите, что неограниченная последовательность $n^{(-1)^n}$ не является бесконечно большой.

№28. Докажите, что последовательность $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+...+\dfrac{1}{2^n}$ сходится к числу 2.

№29. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

№30. Приведите примеры последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \infty$, а их произведение $\{x_n y_n\}$ являлось последовательностью: а) сходящейся; б) бесконечно малой; в) бесконечно большой; г) расходящейся.

№31. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$.

№32. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-3}{n^5+1}$.

№33. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3+4}{5n-21}$.

№34. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$.

№35. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

№36. Докажите, что последовательность $\dfrac{n}{2n+1}$ монотонно возрастает.

№37. Используя определение, докажите, что последовательность $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ имеет бесконечный предел при $n \to +\infty$ (т.е. является бесконечно большой), определив для произвольного $E > 0$ число $N = N(E)$ такое, что $|x_n| > E$ при $n > N$.

№38. Сформулируйте определения: а) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$, б) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, в) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

№39. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}$.

Указание: сделайте замену $t = \sqrt[6]{1+\frac{1}{n}}$.

№40. С помощью 1-го замечательного предела вычислите предел

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin\frac{1}{3n^2}.$$

№41. С помощью 2-го замечательного предела вычислите предел

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n.$$

№42. Известно, что если числовая последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (имеет конечный предел). Докажите сходимость последовательности:

$$x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Указание: для доказательства монотонности рассмотрите отношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ и сравните его с 1.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ:

I. Задачи на свойства действительных чисел.

№1. *Рациональным* называется число, представимое в виде бесконечной десятичной дроби (иначе: число, представимое в виде обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$). *Иррациональным* называется число, представимое в виде бесконечной десятичной непериодической дроби. *Действительным* называется число, представимое в виде бесконечной десятичной дроби $a_0, a_1 a_2 a_3...$ Таким образом, любое действительное число является либо рациональным, либо – иррациональным.

$5,424242... = 5,(42)$ – периодическая дробь $\Rightarrow$ рациональное число,

$0,32375375... = 0,32(375)$ – периодическая дробь $\Rightarrow$ рациональное число,

$1,31301300130001...$ – непериодическая дробь $\Rightarrow$ иррациональное число,

$\frac{3}{4}$ – обыкновенная дробь $\Rightarrow$ рациональное число,

$\sqrt{4} = 2 = 2,(0)$ – целое число (=периодическая дробь) $\Rightarrow$ рациональное число,

$\sqrt{5}$ – иррациональное число,

$\log_3 5$ – иррациональное число,

$1 + \sqrt{3}$ – иррациональное число,

$(\pi - 2)$ – иррациональное число.

№2. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом? – Да, например, $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$.

Может ли произведение двух иррациональных чисел быть рациональным? – Да, например, $(\sqrt{3} + 1) \times (\sqrt{3} - 1) = 2$.

Может ли произведение рационального и иррационального чисел быть рациональным числом? – Да, если рациональное число – это нуль. В остальных случаях это произведение иррационально.

№3. Пусть, от противного, $\sqrt{3}$ – рациональное число. Тогда оно представимо в виде несократимой обыкновенной дроби $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Возводя в квадрат, перепишем равенство в эквивалентном виде $3 = \frac{p^2}{q^2}$, или $3q^2 = p^2$. Так как левая часть равенства делится нацело на 3, то и правая часть делится на 3, т.е. $p^2 \vdots 3$. Но тогда $p \vdots 3$, т.е. найдётся натуральное n такое, что $p = 3n$. Подставим в равенство $3q^2 = p^2$ вместо p выражение $3n$ и получим: $3q^2 = (3n)^2 \Leftrightarrow q^2 = 3n^2$. Аналогично рассуждая, получаем, что так как правая часть в этом равенстве кратна трём, то и левая тоже, т.е. $q^2 \vdots 3$, но тогда $q \vdots 3$, а значит, q можно представить в виде $q = 3k$, где $k \in \mathbb{N}$. Получили, что дробь $\frac{p}{q} = \frac{3n}{3k}$ сократима на 3. Это противоречит несократимости дроби.

№4. Решим задачу методом «от противного». Предположим, что это число не является иррациональным, тогда оно рационально и его можно представить в виде несократимой обыкновенной дроби $\log_2 3 = \frac{p}{q}$, или $q \log_2 3 = p$. Внося q под знак логарифма, получим $\log_2 3^q = p$. Пропотенцируем последнее равенство по основанию 2: $2^{\log_2 3^q} = 2^p$, или, упрощая левую часть, окончательно получаем $3^q = 2^p$. Заметим теперь, что при натуральных p и q левая часть этого равенства делится нацело на 3, а правая – нет. Получили противоречие. Следовательно, предположение было неверно, а значит, данное число – иррационально.

№5. Рациональные: $1,5$; $1,(6)$; Иррациональные: $\sqrt{2}+0,000001$; $\sqrt{2}+0,1(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; $\sqrt{2.1}$; $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$; $1,67891011\ldots$.

№6. Перепишем числа в виде: $1,12345121234512(1234512)$ или $1,1234512345(12345)$. Первые 7 цифр после запятой у этих чисел одинаковы, но восьмая цифра «1» у первого числа меньше восьмой цифры «3» у второго числа, поэтому второе число больше.

№7. Упростим оба числа:

а) $4 \cdot 10^{2011} - 1 = 4\underbrace{00\ldots0}_{2011} - 1 = 3\underbrace{99\ldots9}_{2011} = 3 \cdot 1\underbrace{33\ldots3}_{2011}$,

б) $4 \cdot \underbrace{33\ldots3}_{2011} + 1 = (3 \cdot \underbrace{33\ldots3}_{2011} + 1) + \underbrace{33\ldots3}_{2011} = (\underbrace{99\ldots9}_{2011} + 1) + \underbrace{33\ldots3}_{2011} =$

$= 1\underbrace{00\ldots0}_{2011} + \underbrace{33\ldots3}_{2011} = 1\underbrace{33\ldots3}_{2011}$. Ответ: 3.

№8. а) Так как $4,(9) = 5,(0)$, то числа равны.

б) Преобразуем периодическую дробь $8,(24)$ к виду обыкновенной. Для этого обозначим это число как $x = 8,(24)$. Умножим это равенство на 100: $100x = 824,(24)$. Вычтем из последнего равенства предпоследнее: $99x = 816$, откуда находим $x = \frac{816}{99}$. Итак, надо сравнить числа

$$2\sqrt{17} \vee \frac{816}{99} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{17} \vee \frac{408}{99} = \frac{136}{33}$$

$$33\sqrt{17} \vee 136 = 17 \cdot 8 \quad \Leftrightarrow \quad 33^2 \cdot 17 \vee 17^2 \cdot 8^2$$

$$33^2 \vee 17 \cdot 8^2 \quad \Leftrightarrow \quad 33^2 \vee 34 \cdot 32$$

$$33^2 \vee (33+1)(33-1) \quad \Leftrightarrow \quad 33^2 > 33^2 - 1.$$

в) Преобразуем дроби: $\frac{7}{33}=\frac{21}{99}$, $\frac{21212121}{99999999}=\frac{21\cdot 1010101}{99\cdot 1010101}=\frac{21}{99}$. Ответ: числа равны.

№9. а) Нет, это рациональное число 1. В самом деле, обозначьте число как x, возведите это равенство в куб и решите полученное кубическое уравнение $x^3=4-3x$ относительно x. Легко подбирается корень $x=1$, других корней нет.

б) Да, это число $\sqrt[3]{45}$. Обозначьте исходное число за x, возведите равенство последовательно два раза в квадрат и решите полученное уравнение $x^4=45x$.

в) Нет, это рациональное (более точно – натуральное) число 2. Обозначьте число за x, возведите равенство в квадрат и решите полученное квадратное уравнение $x^2=2+x$.

№10. а) Воспользуемся свойством: $[x]=n \Leftrightarrow n\leq x<n+1$. Тогда $[x+1.5]=-5 \Leftrightarrow -5\leq x+1.5<-4 \Leftrightarrow -6,5\leq x<-5,5$.

б) Воспользуемся свойством: $x=[x]+\{x\}$, тогда получим $[x]\cdot\{x\}<[x]+\{x\}-1 \Leftrightarrow ([x]-1)(\{x\}-1)<0$. Так как $\{x\}<1$, то поделим обе части неравенства на второй из сомножителей, получим $[x]-1>0$, т.е. $[x]>1$, или $[x]\geq 2$, откуда находим $x\geq 2$.

№11. Подставим в уравнение вместо x корень $1+\sqrt{3}$: $(1+\sqrt{3})^2+p(1+\sqrt{3})+q=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}(p+2)=-(4+p+q)$. Справа от знака равенства стоит рациональное число, поэтому слева тоже должно быть рациональное число, но это возможно лишь в случае, когда $p+2=0$. Тогда и справа должен быть нуль. Итак, равенство возможно тогда и только тогда, когда $\begin{cases} p+2=0, \\ -(4+p+q)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-2, \\ q=-2. \end{cases}$

№12. Так как $|a|\geq a$, причём $|a|=a \Leftrightarrow a\geq 0$, то $|x-1|\geq x-1$, $|x+1|\geq x+1$, $|x-2|\geq x-2$, $|x+2|\geq x+2$,..., $|x-100|\geq x-100$, $|x+100|\geq x+100$. Складывая эти 200 неравенств, получим $|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+...+|x-100|+|x+100|\geq 200x$, причём последнее неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда все складываемые неравенства обращаются в равенство. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ x-2 \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x-100 \geq 0, \\ x+100 \geq 0, \end{cases}$$

решая которую, находим $x \in [100, +\infty)$.

№13. Натуральное число, большее единицы, называется *простым*, если оно делится только на 1 и само себя и других натуральных делителей не имеет. Натуральное число, большее единицы, называется *составным*, если оно не является простым.

а) По формуле суммы кубов число можно разложить на натуральные (отличные от единицы) множители: $43^{111} + 8^{37} = (43^{37})^3 + (2^{37})^3 = (43^{37} + 2^{37})((43^{37})^2 - 43^{37}2^{37} + (2^{37})^2)$. Следовательно, данное число составное.

б) Данное число делится на 11 и поэтому является составным.

в) Так как произведение нечётных чисел является нечётным числом, то число $100007 \cdot 100013 \cdot 100001$ – нечётное. Далее, сумма двух нечётных чисел есть чётное число. А чётное число, большее 2, является составным.

№14. Данное уравнение расщепляется на совокупность нескольких уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} (x-1)^5 = 0, \\ x+2 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Первое уравнение имеет 5 одинаковых действительных корней $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$ (говорят также, что корень $x = 1$ имеет кратность 5). Второе уравнение даёт ещё один действительный корень $x_6 = -2$. А последнее уравнение не имеет действительных корней, так как его дискриминант $D = -4 < 0$. Однако оно имеет пару комплексных корней, которые мы можем найти, используя известную формулу корней квадратного уравнения и используя обозначение $\sqrt{-1} = i$ (*мни-*

мая единица):

$$x_{7,8} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{-2 \pm 2i}{4} = \frac{-1 \pm i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i.$$

II. Задачи на множества действительных чисел

№16. Пусть даны два множества A и B, состоящие из действительных чисел, которые называют при этом *элементами* этих множеств.

Пересечением множеств A и B (обозначение: $A \cap B$) называется множество, состоящее из тех и только тех чисел x, которые принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B (т.е. общие элементы). Кратко, используя математическую символику, это определение можно записать так:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Здесь знак $|$ заменяет словосочетание «такой что», знак $\in$ означает «принадлежит» (элемент x принадлежит множеству A), а знак $\wedge$ (логическое "и") заменяет слово «и».

Объединением множеств A и B (обозначение: $A \cup B$) называется множество, которое состоит из тех и только тех чисел, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Здесь знак $\vee$ (логическое "или") заменяет слово «или». В частности, если множества A и B не пересекаются (не имеют общих чисел), т.е. $A \cap B = \varnothing$, то их объединение обозначают также $A + B = A \cup B$ и называют *суммой.*

Разность множеств A и B (обозначение: $A \setminus B$) – это множество, состоящее из тех элементов A, которые не принадлежат B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$

а) $A \bigcup B = [2, 6)$, $A \cap B = (3, 5]$, $A \setminus B = [2, 3]$.

б) $A \bigcup B = \{1\} \bigcup (3, 7)$, $A \cap B = \{4\}$, $A \setminus B = \{1\} \bigcup [5, 7]$.

№17. Чтобы показать, что мощности этих двух бесконечных множеств одинаковы (множества содержат «равное» количество элементов), достаточно установить между элементами этих множеств взаимно однозначное соответствие. Рассмотрим для этого функцию $y = \operatorname{tg} x$.

Каждому числу x из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ эта строго возрастающая функция ставит в соответствие единственное действительное число $y = \operatorname{tg} x$ и наоборот, каждому действительному числу y отвечает единственное $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ такое, что $\operatorname{tg} x = y$. Взаимно однозначное соответствие установлено, что доказывает равномощность множеств.

Примеры счётных множеств: $X = \{1, 2, 3\}$ (и, вообще, любое множество, состоящее из конечного числа элементов); $X = \mathbb{N}$ (множество натуральных чисел); $X = \mathbb{Z}$ (множество целых чисел); $X = \mathbb{Q}$ (множество рациональных чисел); $X = \left\{\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{n^2}, ...\right\}$.

Примеры несчётных множеств: $X = (0, 1)$, $X = (0, 1) \bigcup \{5\}$, $X = \mathbb{R}$ (множество всех действительных чисел) – являются множествами мощности континуум.

№18. Множество действительных чисел X называется *ограниченным* (на числовой прямой), если существуют два числа m и M такие, что при всех $x \in X$ выполняется неравенство $m \leq x \leq M$. Пусть x – любое число из данного в задаче множества X (оно имеет вид $\frac{1}{n}$ при некотором n). И в данном случае при любом натуральном n выполняется неравенство $0 < x \leq 1$, что и доказывает ограниченность данного множества.

№19. а) $\inf X = 2$ (не достигается), $\sup X = 5$ (достигается);

б) $\inf X = 1$ (достигается), $\sup X = 7$ (не достигается);

в) $\inf X = -\infty$ (не достигается), $\sup X = 8$ (не достигается);

г) $\inf X = 0$ (не достигается), $\sup X = 1$ (достигается).

Пример числового множества X, в котором $\sup X = \inf X$: $X = \{1\}$. Это множество состоит из одного числа, которое одновременно является и точной нижней, и точной верхней гранями множества, и обе достигаются на этом элементе.

№20. Точка x_0 называется *предельной точкой* множества X, если в любой (сколь угодно малой!) окрестности точки x_0 всегда имеется по крайней мере ещё одна точка множества X, отличная от точки x_0. (Отсюда следует, что в любой окрестности предельной точки всегда содержится бесконечное число точек множества X.) При этом сама предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X. Например, любая точка отрезка $[a, b]$ является его предельной точкой. Любая точка интервала (a, b) также является его предельной точкой.

Точка x_0 называется *граничной точкой* множества X, если в любой (сколь угодно малой!) её окрестности есть как точки, принадлежащие множеству, так и точки, ему не принадлежащие. Множество всех граничных точек данного множества образуют его *границу*. Например, у интервала (a, b) его концы – точки точки a и b – являются его граничными точками.

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (например, отрезок $[a, b]$). Если множество не имеет ни одной предельной точки (например, множество $X = \{0, 1, 2\}$), то его тоже принято считать замкнутым. В противном случае множество называют *открытым*. Например, интервал (a, b) – открытое множество, так как две его предельные точки a и b ему не принадлежат. Операция добавления ко множеству всех его предельных точек называется операцией *замыкания*. В результате такой операции получаем замкнутое множество. Если мы добавим к интервалу (a, b) точки a и b, то полученное множество – отрезок $[a, b]$ – уже станет замкнутым. То есть замыканием интервала (a, b) является отрезок $[a, b]$.

III. Задачи на числовые последовательности.

№21. Действительное число a называется *пределом* числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого (сколь угодно малого!) положительного числа ε найдётся такой номер n_0, что при всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, или, что то же самое, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Иными словами, начиная с номера n_0, все члены последовательности находятся в ε-окрестности точки a на числовой прямой.

Имеем: $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = n^2$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)}{5n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{5n^2} = \frac{1}{5}.$$

№22. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)! - n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1.$

№23. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существуют такие числа m и M, что при всех натуральных номерах n выполняется неравенство $m \leq x_n \leq M$.

а) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ – ограниченная последовательность. Действительно, выпишем в явном виде несколько первых членов этой последовательности: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$ Получаем, что при всех натуральных n имеет место неравенство $-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}$, а это и означает ограниченность числовой последовательности. Иначе: заметим, что у этой последовательности существует конечный предел: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, т.е. эта последовательность сходится. Однако известно, что любая сходящаяся последовательность является ограниченной.

б) $\{2^{-n}\}$ – ограниченная последовательность. Общий член этой последовательности можно переписать в эквивалентном виде: $\frac{1}{2^n}$. Выпишем в явном виде несколько первых членов: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ Очевидно, что при любых натуральных номерах n выполнено неравенство $0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$, которое является одновременно условием ограниченности этой последовательности.

в) $\left\{-\frac{1}{n^3}\right\}$ – ограниченная последовательность. Выпишем в явном виде несколько первых членов: $-1, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{27}, \ldots$ Очевидно, при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство: $-1 \leq -\frac{1}{n^3} < 0$, которое означает ограниченность данной последовательности. Иначе: последовательность имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n^3}\right) = 0$, а любая сходящаяся последовательность ограничена.

г) $\{\sin n\}$ – ограниченная последовательность, так как $|\sin n| \leq 1$, т.е. $-1 \leq \sin n \leq 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

д) $\{-\sqrt[3]{n}\}$ – неограниченная (снизу) последовательность, так как она, неограниченно убывая с ростом n, стремится в пределе к $-\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\sqrt[3]{n}) = -\infty$. Такие последовательности называют бесконечно большими.

е) $\{\ln n\}$ – неограниченная (сверху) последовательность, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ (бесконечно большая последовательность).

ж) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ – ограниченная последовательность, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

з) $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ – ограниченная последовательность, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

и) $\dfrac{n}{n+1}$ – ограниченная последовательность, так как $0 < \dfrac{n}{n+1} < 1$.

к) $(n-5)^2$ – неограниченная (сверху) последовательность, так как $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-5)^2 = +\infty$.

л) $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$ – ограниченная последовательность, так как $-1 \leq x_n \leq 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

№24. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если для любого натурального номера n выполняется неравенство $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$). В частности, если для любого натурального номера n выполняется строгое неравенство $x_n < x_{n+1}$ (соответственно, $x_n > x_{n+1}$), то последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*). Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*, причём убывающие и возрастающие – *строго монотонными*.

а) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ – немонотонная (знакочередующаяся) последовательность.

б) $\{2^{-n}\}$ – монотонно убывающая последовательность, так как $x_n = \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}} = x_{n+1}$ для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$

в) $\left\{-\frac{1}{n^3}\right\}$ – монотонно возрастающая последовательность (это хорошо видно, если выписать в явном виде несколько первых членов: $-1, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{27}, \ldots$). Выполняется определение возрастающей последовательности: $x_n = -\frac{1}{n^3} < -\frac{1}{(n+1)^3} = x_{n+1}$.

г) $\{\sin n\}$ – немонотонная последовательность.

д) $\{-\sqrt[3]{n}\}$ – монотонно убывающая последовательность, поскольку $x_n = -\sqrt[3]{n} > -\sqrt[3]{n+1} = x_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

е) $\{\ln n\}$ – монотонно возрастающая последовательность, так как $x_n = \ln n < \ln(n+1) = x_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

ж) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ – монотонно убывающая последовательность, поскольку $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n > \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = x_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

з) $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ – монотонно убывающая последовательность, поскольку $x_n = \frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!} = x_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

и) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ – монотонно возрастающая последовательность. Действительно, $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Так как $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ – убывающая последовательность, то $\left\{-\frac{1}{n+1}\right\}$ – возрастающая последовательность. Прибавление константы (единицы) не меняет монотонности последовательности.

к) $\{(n-5)^2\}$ – немонотонная последовательность, так как вначале её члены уменьшаются, а затем начинают увеличиваться: $16, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

л) $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$ – немонотонная, знакочередующаяся последовательность.

№25. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого (сколь угодно большого) положительного действительного числа A найдётся такой номер $N = N(A)$ (зависящий от A), что для любого $n \geq N$ (т.е. начиная с этого номера) будет выполнено: $|x_n| > A$. То есть если её предел равен бесконечности (неважно, какого знака).

Например, последовательности $x_n = n^4$, $y_n = (-1)^n n$ являются бесконечно большими. Заметим, что если последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то она является неограниченной.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного действительного числа ε найдётся натуральный номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geq N$ будет выполнено: $|x_n| < \varepsilon$. Иными словами, если она имеет предел, равный нулю (сходится к 0).

а) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность, поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

б) $\{2^{-n}\}$ – бесконечно малая последовательность, поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

в) $\left\{-\frac{1}{n^3}\right\}$ – бесконечно малая последовательность, поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\frac{1}{n^3}) = 0$.

г) $\{\sin n\}$ – не является ни бесконечно малой, ни бесконечно большой последовательностью.

д) $\{-\sqrt[3]{n}\}$ – бесконечно большая последовательность, поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\sqrt[3]{n}) = -\infty$.

е) $\{\ln n\}$ – бесконечно большая последовательность, поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n) = +\infty$.

ж) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ – бесконечно малая последовательность, поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

з) $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ – бесконечно малая последовательность, поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

и) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ – не является ни бесконечно малой, ни бесконечно большой последовательностью, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

к) $\{(n-5)^2\}$ – бесконечно большая последовательность, поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-5)^2 = +\infty$.

л) $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, ...\}$ – не является ни бесконечно малой, ни бесконечно большой последовательностью. Эта последовательность вообще не имеет предела (расходится).

№26. Приведём три эквивалентных между собой определения сходящейся последовательности.

Опр. 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует число a, являющееся её пределом. При этом говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к этому числу. Обозначение: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, или $x_n \to a$ при $n \to +\infty$. Если последовательность не является сходящейся, то считается, что она *расходится*.

Опр. 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если найдётся действительное число a такое, что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. Число a в этом случае является *пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Опр. 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если найдётся действительное число a такое, что в любой $\varepsilon-$окрестности точки a содержатся все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера (зависящего, вообще говоря, от ε).

а) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ – сходящаяся последовательность, поскольку существует конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

б) $\{2^{-n}\}$ – сходящаяся последовательность, поскольку существует конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

в) $\left\{-\frac{1}{n^3}\right\}$ – сходящаяся последовательность, поскольку существует конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\frac{1}{n^3}) = 0$.

г) $\{\sin n\}$ – не существует предела, следовательно, последовательность расходится.

д) $\{-\sqrt[3]{n}\}$ – существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\sqrt[3]{n}) = -\infty$, но он бесконечен, следовательно, последовательность расходится.

е) $\{\ln n\}$ – существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n) = +\infty$, но он бесконечен, следовательно, последовательность расходится.

ж) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ – сходящаяся последовательность, поскольку существует конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

з) $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ – сходящаяся последовательность, поскольку существует конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

и) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ – сходящаяся последовательность, поскольку существует конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

к) $\{(n-5)^2\}$ – существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-5)^2 = +\infty$, но он бесконечен, следовательно, последовательность расходится.

л) $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, ...\}$ – не существует предела, следовательно, последовательность расходится.

№27. Покажем, что неограниченная последовательность $n^{(-1)^n}$ не является бесконечно большой. Выпишем несколько первых членов последовательности: $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, \ldots$ Видно, что данная последовательность содержит подпоследовательность с нечётными номерами $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$, которая сходится к нулю (является бесконечно малой), а это противоречит определению бесконечно большой последовательности.

№28. Докажем, что последовательность $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$ сходится к числу 2. Для этого преобразуем n-й член последовательности по формуле суммы первых n членов геометрической прогресссии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$: $x_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2$, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$.

№29. Умножим и разделим выражение под знаком предела на сопряжённое выражение:

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = 0.$$

№30. Приведём примеры последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \infty$, а их произведение $\{x_n y_n\}$ являлось последовательностью:

а) сходящейся: $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$, $y_n = n$;

б) бесконечно малой: $x_n = \frac{1}{n^3}$, $y_n = n$;

в) бесконечно большой: $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n^2$;

г) расходящейся: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = n^2$.

№31. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(3-\frac{1}{n^2})} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}$.

№32. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-3}{n^5+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(2-\frac{3}{n})}{n(n^4+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-\frac{3}{n}}{n^4+\frac{1}{n}} = 0.$

№33. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^3+4}{5n-21} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(2n^2+\frac{4}{n})}{n(5-\frac{21}{n})} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+\frac{4}{n}}{5-\frac{21}{n}} = +\infty.$

№34. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n \sin n!}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n^2+1} \cdot \sin n!\right) = 0$ как предел произведения бесконечно малой последовательности $\{\frac{n}{n^2+1}\} \to 0$ на ограниченную последовательность $\{\sin n!\}$.

№35. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+3+...+n}{\sqrt{9n^4+1}}$. В числителе преобразуем сумму первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \dfrac{a_1+a_n}{2}n$: $1+2+3+...+n = \dfrac{(1+n)n}{2}$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+3+...+n}{\sqrt{9n^4+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1+n)n}{2\sqrt{9n^4+1}} = = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2(\frac{1}{n}+1)}{2n^2\sqrt{9+\frac{1}{n^4}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{n}+1}{2\sqrt{9+\frac{1}{n^4}}} = \dfrac{1}{6}$.

№36. Докажем, что последовательность $x_n = \frac{n}{2n+1}$ монотонно возрастает. Для этого запишем определение возрастающей последовательности: $x_n < x_{n+1}$, или $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ при всех натуральных n. Покажем, что оно выполняется:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2(n+1)+1)n} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+3)n} > 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n} > 1 \quad \text{– верно при всех натуральных } n,$$

что и требовалось показать.

№37. Используя определение, докажем, что последовательность $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ имеет бесконечный предел при $n \to +\infty$ (т.е. является бесконечно большой), определив для произвольного $E > 0$ число $N = N(E)$ такое, что $|x_n| > E$ при $n > N$.

Зафиксируем произвольно большое положительное число E и выпишем неравенство $|x_n| > E \Leftrightarrow |2^{\sqrt{n}}| > E \Leftrightarrow 2^{\sqrt{n}} > E$. Найдём, начиная с какого натурального номера n выполняется это неравенство. Прологарифмируем его по основанию 2: $\sqrt{n} > \log_2 E \Leftrightarrow n > \log_2^2 E$. Наименьшее натуральный номер $N = N(E)$, начиная с которого выполняется данное неравенство, будет $N = [\log_2^2 E] + 1$, где $[\log_2^2 E]$ – целая часть числа $\log_2^2 E$.

№38. Сформулируем определения:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$, если для любого положительного (сколь угодно малого!) числа ε существует натуральный номер $N = N(\varepsilon)$ (зависящий от ε) такой, что при всех $n \geq N$ выполяется условие: $|x_n - A| < \varepsilon$.

б) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, если для любого (сколь угодно большого!) действительного $E > 0$ найдётся номер N, зависящий от E, такой, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n| > E$.

в) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, если для любого (сколь угодно большого!) действительного $E > 0$ найдётся номер N, зависящий от E, такой, что $x_n > E\ \forall n \geq N$.

№39. Сделаем замену $t = \sqrt[6]{1+\frac{1}{n}}$, тогда получим

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1} = \lim_{t\to1} \frac{t^2-1}{t^3-1} = \lim_{t\to1} \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to1} \frac{t+1}{t^2+t+1} = \frac{2}{3}.$$

№40. С помощью 1-го замечательного предела вычислим предел

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 \sin\frac{1}{3n^2}\right) = \frac{1}{3}\cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{3n^2}}{\frac{1}{3n^2}} = \frac{1}{3}.$$

№41. С помощью 2-го замечательного предела $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ вычислим предел

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$$

№42. Известно, что если числовая последовательность монотонно убывает и ограничена снизу, то она сходится. Докажем сходимость данной последовательности $x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

Во-первых, очевидно, что все члены последовательности положительны (т.е. она ограничена снизу числом 0).

Во-вторых, для доказательства монотонного убывания последовательности рассмотрим отношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ и покажем, что оно меньше 1 при всех натуральных n (в общем случае было бы достаточно, чтобы это выполнялось, начиная с некоторого номера):

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} = 1-\frac{1}{2^{n+1}} < 1.$$

3 СЕМИНАР: Функции одной действительной переменной: определения, основные свойства

Раздел: Математический анализ (функции одной действительной переменной).

I. Функция одной действительной переменной. Понятие функции. Область определения, область значений, график. Явный, неявный и параметрический способы задания функции в декартовой и полярной системах координат. Формулы перехода из прямоугольной системы координат в полярную.

II. Основные свойства функций. Чётность (нечётность), периодичность, ограниченность (сверху, снизу, с двух сторон), точные грани функций, наибольшее и наименьшее значения, монотонность, локальные и глобальные экстремумы, выпуклость и точки перегиба. Понятие обратной функции, свойства взаимно обратных функций. Основные элементарные функции и их графики.

Контроль знаний: проверка домашнего задания, самостоятельная работа по темам семинаров 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА.

[4] Раздел II (Введение в анализ), Гл. 5 (Функция):

[5] Гл. 4 (Функция), §1 (Основные понятия),

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 3.

Как выполнять домашнее задание. *Вы читаете условие задачи и пробуете её решить. Если вы испытываете сложности, то тогда вы можете заглянуть в решение и разобрать его. Никогда не пытайтесь сразу смотреть в решение, если хотите получить положительный результат! Если остались вопросы, спросите у вашего преподавателя. Перед решением задач рекомендуется прочитать лекцию по соответствующему разделу.*

3.1 Задачи на нахождение области определения и множества значений функции

№1. Найдите область определения, область значений функций и постройте эскизы их графиков:

$$\text{а) } y = \log_2(x-1), \quad \text{б) } y = \frac{1}{x+1}, \quad \text{в) } y = 2^x, \quad \text{г) } y = (x-2)^2 + 3,$$

$$\text{д) } y = \arcsin x, \quad \text{е) } y = \operatorname{arctg} x, \quad \text{ж) } y = D(x) \text{ (функция Дирихле).}$$

№2. Найдите область определения, область значений функций и постройте эскизы их графиков:

$$\text{а) } y = \sqrt{x-1}, \quad \text{б) } y = \sqrt{1-x}, \quad \text{в) } y = \sin x, \quad \text{г) } y = \cos x,$$

$$\text{д) } y = \operatorname{tg} x, \quad \text{е) } y = \operatorname{ctg} x, \quad \text{ж) } y = [x], \quad \text{з) } y = \{x\}, \quad \text{и) } y = |1 - x^2|.$$

№3. Найдите множество значений дробно-рациональной функции $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

3.2 Задачи на ограниченность и точные грани функции

№4. Что такое точная нижняя (точная верхняя) грани функции? (Сформулируйте определения). Найдите точную нижнюю и точную верхнюю грани функций из задач №1 и №2 и укажите, достигаются ли они и при каких x.

3.3 Задачи на монотонные функции

№5. Что такое возрастающая, убывающая, невозрастающая, неубывающая функции? Что значит монотонная (немонотонная) функция? (Приведите определения). Построив графики функций, убедитесь в том, что функции $y = x$, $y = x^3$, $y = 2^x$, $y = \sqrt[3]{x}$ $(x \in \mathbb{R})$, $y = \ln x$ $(x > 0)$, $y = \operatorname{tg} x$ при $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ являются возрастающими, функции $y = -x$, $y = -x^5$, $y = -\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$, $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$, $y = (\frac{1}{3})^x$, $y = \operatorname{ctg} x$ при $x \in (0, \pi)$ являются убывающими, функция $y = -\operatorname{sgn} x$ является невозрастающей, а функция $y = \operatorname{sgn} x$ – неубывающей. Являются ли монотонными функции $y = [x]$ (антье, или целая часть), $y = \{x\}$ (мантисса, или дробная часть)? Приведите другие примеры монотонных и немонотонных функций.

3.4 Задачи на периодические функции

№6. Что такое периодическая функция, период, главный период? Приведите определение. Найдите главный период функций:

а) $y = \cos^2 3x$, б) $y = 5\sin\dfrac{3x}{2} - 3\cos\dfrac{x}{3}$, в) $y \equiv 1$, г) $y = \cos x - 5\operatorname{tg}\pi x$.

№7. Может ли сумма периодической и непериодической функций быть периодической функцией? Рассмотрите пример: $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = \cos x - \sin(\pi x)$.

№8. Существуют ли значения параметра a, при которых функция $y = \dfrac{x^2 - a}{x^2 - a}$ является периодической?

3.5 Задачи на локальные экстремумы функции

№9. Что такое локальный максимум (минимум) функции? Локальный экстремум? (Сформулируйте определения). В следующих примерах определите, имеет ли функция локальный экстремум в точке $x = 0$. Если да, то какой именно и почему (постройте графики):

$$\text{а)}\quad y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ \text{не определена}, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

$$\text{б)}\quad y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ -1, & \text{если } x = 0; \end{cases} \qquad \text{в)}\quad y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

$$\text{г)}\quad y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ -x^2, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

№10. При каких значениях параметра a локальный максимум функции $y = 3ax^2 - 12ax + a^2 - 11$ равен 2?

№11. Найдите локальные экстремумы функций:

а) функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \neq 0, \\ -2, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ в) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \neq 0, \\ 10, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

3.6 Задачи на выпуклые функции

№12. Что означает, что функция выпукла вверх (вниз) на множестве X? Что такое точка перегиба графика функции? (Приведите соответствующие определения).

Какие из функций: $y = |x|$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = \sqrt{x}$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $y = \frac{1}{x}$ сохраняют одно и то же направление выпуклости на всей области определения (и какое)? Графики каких из указанных функций имеют точки перегиба? Найдите эти точки.

3.7 Задачи на обратные функции

№13. Что такое обратная функция и как её найти? Может ли функция совпадать со своей обратной? Найдите обратную функцию к дробно-линейной функции $y = \dfrac{2x+3}{5x-2}$.

№14. Может ли немонотонная функция $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ иметь однозначную обратную функцию? Рассмотрите пример:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ – рационально;} \\ -x, & \text{если } x \text{ – иррационально.} \end{cases}$$

3.8 Задачи на решение функциональных уравнений

№15. Известно, что для всех $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 5-2x$, $f(2-3g(x)) = 13-24x$. Определите вид функции $g(x)$.

№16. Найдите все функции f, удовлетворяющие при всех действительных x и y уравнению: $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$.

№17. Найдите значение $f(2)$, если для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $2f(x) - 3f(\frac{1}{x}) = x^2$.

Указание: подставьте в уравнение сначала $x = 2$, затем $x = \frac{1}{2}$ и из полученной системы уравнений найдите $f(2)$.

3.9 Задачи на нахождение наименьшего (наибольшего) значения функции

№18. Используя неравенство о сумме двух взаимно обратных положительных чисел, найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 4\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x},$$

а также все значения x, при которых оно достигается.

№19. Применяя неравенство Коши, найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^4 + \dfrac{2}{x^2}$. При каких x оно достигается?

№20. Верно ли, что любая ограниченная сверху функция имеет наибольшее значение? Рассмотрите пример $y = \operatorname{arctg} x$.

№21. Требуется найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^4 + 6x^2 + 10}{x^2 + 3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Студент решил задачу так. «Перепишем функцию в виде

$$y = \frac{x^4 + 6x^2 + 10}{x^2 + 3} = \frac{x^2(x^2 + 3) + 3(x^2 + 3) + 1}{x^2 + 3} = x^2 + 3 + \frac{1}{x^2 + 3}$$

(можно было поделить многочлен в числителе на многочлен в знаменателе). Воспользуемся неравенством о сумме двух обратных положительных чисел: $y = x^2 + 3 + \frac{1}{x^2+3} \geq 2$, причём наименьшее значение, равное 2, достигается лишь при условии $x^2 + 3 = 1$, которое, очевидно, не выполняется ни при каких значениях x. Следовательно, наименьшее значение функции не существует». Прав ли студент?

3.10 Задачи на чётные и нечётные функции

№22. Что такое чётная (нечётная) функция? Сформулируйте определения. Является ли функция $y = \log_2(x + \sqrt{1 + x^2})$ чётной или нечётной?

№23. Является ли функция $y = |x-2| - 3|x| + |x+2|$ чётной или нечётной?

№24. Если можно, то представьте функцию $y = 3^x$ в виде суммы чётной и нечётной функций.

Указание: воспользоваться тождеством: $f(x) \equiv \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

№25. Найдите функцию, определённую на всей числовой прямой, которая одновременно является чётной, нечётной, невозрастающей, неубывающей и периодической.

№26. Постройте график функции $f(x)$, которая определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4 и на промежутке $0 \le x \le 2$ её значения вычисляются по правилу $f(x) = 1 - |x-1|$.

3.11 Разные задачи

№27. При каком значении параметра m графики функций $y = x^2 + mx + 3$ и $y = x^2 + 19x + 8$ не пересекутся?

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ:

I. Задачи на нахождение области определения и множества значений функции.

№1. а) $y = \log_2(x-1)$. Область определения $D(y)$ этой логарифмической функции задаётся неравенством $x - 1 > 0$, поэтому $D(y) = (1, +\infty)$. Область значений функции: $E(y) = \mathbb{R}$, или $E(y) = (-\infty, +\infty)$. График функции имеет вертикальную аси́мптоту, уравнение которой $x = 1$, и расположен в правой полуплоскости от этой прямой. График может быть получен параллельным переносом графика $y = \log_2 x$ вправо на единицу.

б) $y = \frac{1}{x+1}$. Область определения: $D(y):\ x \neq -1$, область значений: $E(y) = (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$. График этой дробно-линейной функции является гиперболой с горизонтальной аси́мптотой $y = 0$ и вертикальной аси́мптотой $x = -1$. График может быть получен параллельным переносом гиперболы $y = \frac{1}{x}$ влево на единицу.

в) $y = 2^x$. Это показательная функция. Её область определения: $D(y) = \mathbb{R}$, область значений: $E(y) = (0, +\infty)$. Так как основание равно 2 (больше единицы), то функция возрастает на всей числовой прямой.

г) $y = (x-2)^2 + 3$. Это квадратичная функция, её график называется параболой. Область определения: $D(y) = \mathbb{R}$, область значений: $E(y) = [3, +\infty)$. График может быть получен параллельным переносом параболы $y = x^2$ вправо на 2 единицы и вверх на 3 единицы.

д) $y = \arcsin x$. Область определения арксинуса (функция, обратная к функции $y = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) представляет собой отрезок $x \in [-1, 1]$, область значений – отрезок $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Функция является нечётной ($\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ \forall\, x \in [-1, 1]$), возрастающей.

е) $y = \operatorname{arctg} x$. Арктангенс (функция, обратная к функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) определён на всём множестве действительных чисел $x \in \mathbb{R}$, область значений – интервал $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Функция является нечётной ($\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$), возрастающей.

ж) Функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально}, \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально}, \end{cases}$$

определена при всех действительных x. Она может принимать всего два значения: 0 и 1, поэтому $E(y) = \{0, 1\}$. Функция чётная, не является монотонной.

№2. а) $y = \sqrt{x-1}$. Область определения $D(y)$ этой функции задаётся неравенством $x - 1 \geq 0$, поэтому $D(y) = [1, +\infty)$. Область значений функции: $E(y) = [0, +\infty)$. Функция возрастает на своей области определения. Её график может быть получен параллельным переносом графика $y = \sqrt{x}$ вправо на единицу.

б) $y = \sqrt{1-x}$. Область определения $D(y)$ этой функции задаётся неравенством $1 - x \geq 0$, поэтому $D(y) = (-\infty, 1]$. Область значений функции: $E(y) = [0, +\infty)$. Функция убывает на своей области определения. Её график симметричен графику функции $y = \sqrt{x-1}$ относительно прямой $x = 1$.

в) $y = \sin x$. Область определения $D(y)$ этой тригонометрической функции $D(y) = \mathbb{R}$. Область значений функции: $E(y) = [-1, 1]$. Функция не монотонна на своей области определения, является нечётной ($\sin(-x) = -\sin x, \forall\, x \in \mathbb{R}$), поэтому её график имеет центр симметрии в начале координат. График функции называется синусоидой, выходит из начала координат под углом 45 градусов. Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$. Наибольшее значение равно 1 и достигается в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, наименьшее значение равно (-1) и достигается при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

г) $y = \cos x$. Область определения $D(y)$ этой тригонометрической функции $D(y) = \mathbb{R}$. Область значений функции: $E(y) = [-1, 1]$. Функция не монотонна на своей области определения, является чётной ($\cos(-x) = \cos x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$), поэтому её график симметричен относительно оси Oy. График функции называется косинусо́идой. Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$. Наибольшее значение равно 1 и достигается в точках $x = 2\pi n$, наименьшее значение равно (-1) и достигается при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

д) $y = \operatorname{tg} x$. Область определения $D(y)$ этой тригонометрической функции $D(y)\,:\; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Область значений функции: $E(y) = \mathbb{R}$. Функция возрастает на интервалах $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n)$, является нечётной ($\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$), поэтому её график имеет центр симметрии в начале координат. График функции называется тангенсоидой, выходит из начала координат под углом 45 градусов. Функция периодическая с периодом $T = \pi$.

е) $y = \operatorname{ctg} x$. Область определения $D(y)$ этой тригонометрической функции $D(y)\,:\; x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Область значений функции: $E(y) = \mathbb{R}$.

Функция убывает на интервалах $x \in (\pi n, \pi + \pi n)$, является нечётной ($\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$), поэтому её график имеет центр симметрии в начале координат. График функции называется котангенсóидой. Функция периодическая с периодом $T = \pi$.

ж) $y = [x]$. См. семинар 1, №17.

з) $y = \{x\}$. См. семинар 1, №17.

и) $y = |1 - x^2|$. Можно построить этот график за несколько шагов. 1) Построим параболу $y = x^2$. 2) Построим график $y = -x^2$ (умножение функции на (-1) приводит к тому, что её график отображается симметрично относительно оси Ox). 3) Построим график $y = 1 - x^2$ (получается из предыдущего параллельным переносом вверх на 1 единицу). 4) Наконец, ту часть графика, которая расположена не ниже оси Ox, мы оставим без изменения, а ту, которая находится в нижней полуплоскости, отразим вверх симметрично оси Ox. График построен.

№3. Найдём возможные значения y без построения графика функции. Заметим, что при $x = 0$ функция принимает значение $y = 0$. Выясним, какие ещё значения может принимать функция. При $y \neq 0$ рассмотрим равенство $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ как квадратное уравнение относительно x с параметром y: $yx^2 - x + 4 = 0$. Переформулируем задачу в эквивалентном виде: «При каких y полученное уравнение имеет решения?» Для этого дискриминант должен быть неотрицателен: $D = 1 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \bigcup \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Объединяя с нулём, приходим к ответу: $E(y) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

№4. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной* на этом множестве, если существуют такие действительные числа m и M (называемые, соответственно, нижней и верхней гранями функции), что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$. В противном случае функция называется *неограниченной* на X. Можно сказать, что ограниченность функции означает ограниченность её области значений.

Например, функция $y = \sin x$ является ограниченной, так как существуют $m = -10$ и $M = 100$ такие, что при всех действительных x выполняется двойное неравенство $-10 \leq \sin x \leq 100$. Мы могли взять другие значения граней, например, $m = -3$ и $M = 2$, и всё равно двойное неравенство (условие ограниченности) выполнялось бы. Понятно, что если существует хотя бы одна конечная верхняя грань, то существуют сразу бесконечно много верхних граней, так как любое число, большее верхней грани, тоже является верхней гранью функции. Итак, как нижних, так и верхних граней у любой ограниченной функции бесконечно много. Наименьшую из всех верхних граней (она всегда существует и единственна) назвали *точной верхней гранью* и обозначили $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ (произносится «супре́мум»), а наибольшую из всех нижних граней, соответственно, *точной нижней гранью* (обозначается $\inf\limits_{x\in X} f(x)$, т.е. «и́нфимум»). Так, для функции синус имеем: $\inf \sin x = -1$, $\inf \sin x = -1$. Точные грани могут достигаться при некоторых x, и тогда их называют *наименьшим и наибольшим значениями функции* на множестве X, но могут и не достигаться ни при каких $x \in X$.

а) $y = \log_2(x-1)$: $\inf y = -\infty$, $\sup y = +\infty$.

б) $y = \frac{1}{x+1}$: $\inf y = -\infty$, $\sup y = +\infty$.

в) $y = 2^x$: $\inf y = 0$ (не достигается), $\sup y = +\infty$.

г) $y = (x-2)^2 + 3$: $\inf y = 3$ (достигается при $x = 2$), $\sup y = +\infty$.

д) $y = \arcsin x$: $\inf y = -\frac{\pi}{2}$ (достигается при $x = -1$), $\sup y = \frac{\pi}{2}$ (достигается при $x = 1$).

е) $y = \operatorname{arctg} x$: $\inf y = -\frac{\pi}{2}$, $\sup y = \frac{\pi}{2}$ (не достигаются).

ж) Функция Дирихле: $\inf y = 0$ (достигается при иррациональных x), $\sup y =$ (достигается при рациональных x).

а) $y = \sqrt{x-1}$: $\inf y = 0$ (достигается при $x = 1$), $\sup y = +\infty$.

б) $y = \sqrt{1-x}$: $\inf y = 0$ (достигается при $x = 1$), $\sup y = 1$ (достигается при $x = 0$).

в) $y = \sin x$: $\inf y = -1$ (достигается при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$), $\sup y = 1$ (достигается при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$).

г) $y = \cos x$: $\inf y = -1$ (достигается при $x = \pi + 2\pi n$), $\sup y = 1$ (достигается при $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$).

д) $y = \operatorname{tg} x$: $\inf y = -\infty$, $\sup y = +\infty$.

е) $y = \operatorname{ctg} x$: $\inf y = -\infty$, $\sup y = +\infty$.

ж) $y = [x]$: $\inf y = -\infty$, $\sup y = +\infty$.

з) $y = \{x\}$: $\inf y = 0$ (достигается при $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$), $\sup y = 1$ (не достигается).

и) $y = |1 - x^2|$: $\inf y = 0$ (достигается при $x = \pm 1$), $\sup y = +\infty$.

№5. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

Иными словами, функция возрастает (убывает) на множестве X, если бо́льшему значению аргумента она ставит в соответствие бо́льшее (соответственно, ме́ньшее) значение функции.

Например, функция $y = x^2$ возрастает на множестве $[0, +\infty)$, поскольку если мы возьмём любые $x_1, x_2 \geq 0$ такие, что $x_1 < x_2$, то будет выполняться неравенство: $f(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = f(x_2)$. На оставшемся промежутке $x \in (-\infty, 0)$ эта функция убывает, что хорошо видно на её графике. Получается, что на всей числовой прямой квадратичная функция не является монотонной.

Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезках $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$, и убывает на отрезках $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$, не являясь монотонной на всей области определения; дробно-рациональная функция $y = 1/x$ убывает на каждом из промежутков $x \in (-\infty, 0)$ и $x \in (0, +\infty)$.

Функция $y = f(x)$ называется *невозрастающей* (*неубывающей*) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \leq f(x_2)$).

По аналогии с последовательностями, возрастающие и убывающие функции называют (строго) *монотонными* функциями. Наряду с убывающими и возрастающими, к монотонным относят неубывающие и невозрастающие функции.

Примеры: $y = x^3$ – возрастающая функция; $\log_{0,1} x$ – убывающая функция; $y = [x]$ (целая часть числа x, антье́) и $y = \operatorname{sgn} x$ (си́гнум, знак числа x) – неубывающие функции:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Примеры немонотонных функций: функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально}, \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально}, \end{cases}$$

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = x^2$.

№6. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *периодической*, если существует такое неравное нулю действительное число T (называемое *периодом*), что для любого $x \in X$ числа $x \pm T$ также принадлежат множеству X, и при этом $\forall x \in X$ выполняется условие периодичности: $f(x + T) = f(x)$. Наименьший положительный период (при условии, что он существует) называется *главным*, или *основным, периодом* функции. По умолчанию в задачах ищется главный период.

Примеры периодических функций: $y = \sin x$, $y = \cos x$ (период $T = 2\pi$), $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (периоды равны π), $y = \{x\}$ (дробная часть числа x, период равен 1).

Из определения периодической функции вытекают её *свойства*:

1) Если периодическая с периодом T функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке x_0, то она определена во всех точках вида $x_0 + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$, и принимает в них то же значение: $f(x_0 + Tn) = f(x_0)$. Если же периодическая с периодом T функция не определена в точке x_0, то она не определена и во всех точках вида $x_0 + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) График периодической функции представляет собой последовательность одинаковых повторяющихся участков длиной, равной периоду T.

3) Если функция $y = f(x)$ периодична с периодом T, то функция $y = A \cdot f(Bx + C) + D$, где A, B, C, D – заданные ненулевые коэффициенты, также периодична, причём её период равен $\frac{T}{|B|}$.

Например, период функции $f(x) = 13\cos 5x - 1$ равен $T = \dfrac{2\pi}{5}$, а у функции $f(x) = -2\operatorname{tg}\dfrac{x}{7} + 6$ период равен $T = 7\pi$.

4) Если даны две периодические функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ с периодами, соответственно, T_1 и T_2, то период их суммы, разности, произведения и частного (при условии, что он существует) будет равен наименьшему положительному числу, которое при делении на T_1 и T_2 даёт в частном целые числа.

Например, функция $y = 5\sin 3x$ периодична с периодом $T_1 = 2\pi/3$, а функция $y = \cos 2x$ имеет период $T_2 = \pi$. Их сумма $y = 5\sin 3x + \cos 2x$ является периодической с периодом $T = 2\pi$.

Однако не всегда сумма двух периодических функций является периодической функцией.

Например, обе функции $y = \sin x$ и $y = \cos \pi x$ являются периодическими. Но так как их периоды несоизмеримы (один из них $T_1 = 2\pi$ иррационален, а другой $T_2 = 2$ – рационален), то обший период T не существует, а значит функция $y = \sin x + \cos \pi x$ не является периодической.

5) Постоянная функция $y = \mathrm{const}$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет определению периодической функции, при этом в качестве периода T у неё может выступать произвольное положительное действительное число. Однако у данной функции не существует главного периода, так как не

существует наименьшего положительного действительного числа.

6) Любая сложная функция $y = f(g(x))$, у которой «внутренняя» функция $g(x)$ является периодической, также будет периодической.

Например, функция $y = \dfrac{5\cos x - 1}{\cos^2 x - 3\cos x}$ является периодической, поскольку её можно представить в виде $y = f(g(x))$, где $g(x) = \cos x$ (периодическая функция), а $f(g) = \dfrac{5g-1}{g^2-3g}$ («внешняя» функция может быть любой, не обязательно периодической).

Найдём главный период функций:

а) $y = \cos^2 3x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 6x)$, поэтому $T = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$;

б) $y = 5\sin\dfrac{3x}{2} - 3\cos\dfrac{x}{3}$. Здесь $T_1 = \dfrac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4\pi}{3}$, $T_2 = 6\pi$. Наименьшее положительное число, которое при делении на T_1 и T_2 даёт в частном целые числа, – это $T = 12\pi$.

в) $y \equiv 1$ – функция периодическая, но главный период не существует.

г) $y = \cos x \cdot 5\operatorname{tg}\pi x$. Здесь $T_1 = 2\pi$ – иррациональное число, $T_2 = 1$ – рациональное число, поэтому не существует такого числа T, которое делилось бы нацело одновременно и на T_1, и на T_2 (общий период не существует). Функция не является периодической.

№7. Да, может. Обратимся к примеру: $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = \cos x - \sin(\pi x)$. Первая из функций периодична с периодом $T_1 = 2$, вторая функция – не является периодической, так как её компоненты имеют несоизмеримые периоды. Однако легко заметить, что их сумма – функция периодическая.

№8. Если $a > 0$, то знаменатель у функции $y = \dfrac{x^2-a}{x^2-a}$ обращается в 0 в двух точках: $x = \pm\sqrt{a}$. Вспомним свойство: «если периодическая с периодом T функция не определена в точке x_0, то она не определена сразу в бесконечном числе точек вида $x_0 + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$». Получили противоречие с данным свойством.

Если $a = 0$, то знаменатель обращается в 0 в единственной точке: $x = 0$. Получили противоречие с тем же свойством периодических функций.

Если же $a < 0$, то знаменатель не обращается в 0 и функция представляет собой тождественную единицу $y \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$. Такая функция является периодической.

Ответ: да, при $a < 0$.

№9. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 своей области определения *локальный максимум* (*минимум*), если найдётся окрестность[1] этой точки, всюду в пределах которой функция определена и принимает значения ме́ньшие либо равные (соответственно, бо́льшие либо равные) значению функции в этой точке x_0. Иными словами, функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум* (*минимум*), если найдётся окрестность этой точки такая, что для любого x из указанной окрестности верно неравенство: $f(x) \leq f(x_0)$ (соответственно, $f(x) \geq f(x_0)$). Если последние неравенства строгие (для всех x из окрестности, отличных от x_0), то получим определения точек *строгого локального максимума (соответственно, минимума)*.

Локальным максимумом (*минимумом*) функции называется значение функции в точке локального максимума (минимума). Локальные максимумы и минимумы называют единым термином – *локальные экстремумы*.

Рассмотрим примеры.

$$\text{а)} \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ \text{не определена}, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

$$\text{б)} \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ -1, & \text{если } x = 0; \end{cases} \qquad \text{в)} \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

$$\text{г)} \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ -x^2, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

а) в точке $x = 0$ нет экстремума, так как функция не определена в этой точке;

б) $x = 0$ – точка строгого локального минимума, сам минимум равен (-1);

в) $x = 0$ – точка строгого локального максимума, равного 1;

г) в точке $x = 0$ нет экстремума, так как слева от точки функция принимает значения, ме́ньшие $y(0) = 0$, а справа – бо́льшие, чем $y(0)$. Определение локального экстремума не выполняется.

№10. Для того чтобы функция $y = 3ax^2 - 12ax + a^2 - 11$ могла иметь локальный максимум, старший коэффициент a должен быть отрицательным (ветви параболы направлены вниз). Выделяя полный квадрат,

[1] Под окрестностью понимается интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, с центром в этой точке.

преобразуем функцию к виду $y = 3a(x^2 - 4x + 4) + a^2 - 12a - 11 = 3a(x-2)^2 + a^2 - 12a - 11$. Отсюда находим обе координаты вершины параболы: $x_{\text{В}} = 2$, $y_{\text{В}} = a^2 - 12a - 11$. (При этом $x = 2$ – точка локального максимума, локальный максимум – это значение функции $y_{\text{В}}$ в вершине этой параболы.) По условию, $y_{\text{В}} = 2 \Leftrightarrow a^2 - 12a - 11 = 2$. Решая это квадратное уравнение, находим: $a = -1$ или $a = 13$ (второе значение нарушает условие $a < 0$). Ответ: при $a = -1$.

№11. Найдите локальные экстремумы функций:

$$\text{а) функция Дирихле}\quad D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \neq 0, \\ -2, & \text{если } x = 0; \end{cases} \qquad \text{в) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \neq 0, \\ 10, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

а) Функция не имеет локальных экстремумов. Действительно, известно, что в любой (сколь угодно малой!) окрестности произвольного действительного числа всегда найдётся бесконечно много как рациональных, так и иррациональных чисел. Поэтому, какое бы x_0 мы ни взяли, в сколь угодно малой окрестности этого числа всегда найдётся как значение x, при котором функция принимает значение 0, так и x, при котором функция равна 1. Нарушается определение локального экстремума в точке x_0.

б) Строгий локальный минимум в точке $x = 0$.

в) Строгие локальные максимумы, равные 1, в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а также строгий локальный максимум, равный 10, в точке $x = 0$.

№12. Множество точек на плоскости называется *выпуклым*, если для любых двух точек из этого множества отрезок, соединяющий данные точки, целиком принадлежит множеству. Примеры выпуклых множеств: отрезок, круг, треугольник, квадрат, выпуклый многоугольник, полуплоскость, вся плоскость. Назовём непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию $y = f(x)$ *выпуклой вниз (вверх)*, если надграфик (подграфик) этой функции[1] является выпуклым множеством.

Имеется другое определение выпуклой вниз (вверх) функции, в основе которого лежит неравенство Йе́нсена[2]. Функция $y = f(x)$, опре-

[1] ***Надграфиком*** функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, называется множество точек плоскости, расположенных над графиком функции: $\operatorname{epi} f(x) = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ y \geq f(x)\}$.

[2] *Йенсен Йоганн Людвиг* (1859–1925) – датский математик, занимался теорией функций. Сформулировал основы теории выпуклых функций.

делённая на отрезке $[a, b]$, называется *выпуклой вниз* на этом отрезке, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполнено неравенство:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

В определении выпуклой вверх функции в неравенстве Йенсена следует заменить знак противоположным ($\geq$). Между выпуклыми вниз и вверх функциями существует простая связь: если $f(x)$ выпукла вверх на $[a, b]$, то $-f(x)$ выпукла вниз на этом отрезке.

Точка $(x_0, f(x_0))$, принадлежащая графику функции, называется *точкой перегиба*, если в этой точке существует касательная к графику, причём справа и слева от этой точки функция имеет разные направления выпуклости.

Разберём примеры:

$y = |x|$ – выпукла вниз на всей числовой прямой;

$y = x^2$ – выпукла вниз на всей числовой прямой;

$y = x^3$ – выпукла вниз при $x \geq 0$ и выпукла вверх при $x \leq 0$; $(0, 0)$ – точка перегиба;

$y = (\frac{1}{2})^x$ (показательная функция) – выпукла вниз на всей числовой прямой;

$y = \sqrt{x}$ – выпукла вверх на всей области определения (при $x \geq 0$);

$y = \cos x$ – выпукла вверх на отрезках $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$, выпукла вниз на $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$; $(\frac{\pi}{2} + \pi n, 0)$ – точки перегиба;

$y = \operatorname{tg} x$ – выпукла вверх на $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, 0]$, $n \in \mathbb{Z}$, выпукла вниз на $[0, \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; $(\pi n, 0)$ – точки перегиба;

$y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$: при $a > 0$ – выпукла вниз на всей числовой прямой; при $a < 0$ – выпукла вверх на всей прямой;

$y = \frac{1}{x}$ – выпукла вверх при $x < 0$, выпукла вниз при $x > 0$; точек перегиба нет.

№13. Пусть функция $y = f(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}$, такова, что разным значениям аргумента ставит в соответствие разные значения функции, т.е. из неравенства $x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ следует неравенство $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда такая функция называется *обратимой*, и у неё существует *обратная функция*, которую обозначают $y = f^{-1}(x)$. Пусть Y – область значений функции $f(x)$. Обратная функция определена на множестве Y и каждому $y \in Y$ ставит в соответствие единственное $x \in X$ такое, что $y = f(x)$.

Если дана функция $y = f(x)$, $x \in X$, то чтобы найти обратную к ней функцию, надо: 1) выразить из равенства $y = f(x)$ переменную x через переменную y. Получим: $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ (не путать со степенью (-1), это просто условное обозначение). 2) Заменить переменную x в последнем равенстве на y, а y, наоборот, заменить на x. Получим $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$. Обратная функция найдена.

Найдём теперь обратную функцию к дробно-линейной функции $y = \dfrac{2x+3}{5x-2}$. Для этого выразим из этогго уравнения переменную x через y:

$$y(5x-2) = 2x+3 \quad x(5y-2) = 3+2y \quad x = \frac{2y+3}{5y-2}.$$

поменяем местами x и y: $y = \dfrac{2x+3}{5x-2}$. Мы нашли обратную функцию, рна определена при всех x, кроме $x = \frac{2}{5}$. Как видим, функция может совпасть со своей обратной. (Это происходит с теми функциями, график которых изначально симметричен сам себе относительно прямой $y = x$.)

№14. Немонотонная функция

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ – рационально;} \\ -x, & \text{если } x \text{ – иррационально,} \end{cases}$$

является обратимой, так как каждому значению y отвечает единственное x. При её нахождении получаем, что обратная функция совпадает с исходной.

№15. Известно, что $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 5-2x$, $f(2-3g(x)) = 13-24x$. По условию, надо определить вид функции $g(x)$. Учтём, что если $f(x) = 5-2x$, то $f(2-3g(x)) = 5-2(2-3g(x))$. Подставляя в уравнение, находим: $5-2(2-3g(x)) = 13-24x$, откуда $g(x) = 2-4x$, $x \in \mathbb{R}$.

№16. Поскольку равенство $f(x-y) = f(x)+f(y)-2xy$ выполняется, по условию, при всех x и y, то, в частности, оно должно выполняться и при $y = x$. В этом случае уравнение примет вид: $f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2$, откуда $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}f(0)$. Осталось найти $f(0)$. Так как последнее равенство выполняется при всех x, то, подставив в него $x = 0$, получим $f(0) = 0$. Итак, мы нашли единственную функцию $f(x) = x^2$. Необходимо сделать проверку того, что для этой функции равенство $f(x-y) = f(x)+f(y)-2xy$ выполняется при всех действительных x и y. Для найденной функции последнее равенство имеет вид $(x-y)^2 =$

x^2+y^2-2xy и, очевидно, верно при любых $x, y \in \mathbb{R}$. Ответ: $f(x)=x^2$.

№17. Подставим в уравнение $x=2$, получим: $2f(2)-3f(\frac{1}{2})=4$. Подставив в уравнение $x=\frac{1}{2}$, получим ещё одно равенство: $2f(\frac{1}{2})-3f(2)=(\frac{1}{2})^2$. Из полученной системы уравнений найдём $f(2)=-7/4$.

№18. Вынося 2 за скобку, получим в скобках сумму обратных положительных чисел: $f(x)=2\left(2\sin^2 x+\frac{1}{2\sin^2 x}\right)\geq 4$, причём наименьшее значение, равное 4, достигается $\Leftrightarrow 2\sin^2 x=1$, т.е. $\sin^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

№19. Представим функцию в виде $f(x)=x^4+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}$ и воспользуемся неравенством Коши для 3-х чисел $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$: $f(x)=x^4+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{x^4\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}}=3$. При этом наименьшее значение функции достигается тогда и только тогда, когда $a=b=c$, т.е. $x^4=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x=\pm 1$.

№20. Нет, неверно. Например, функция $y=\operatorname{arctg} x$, $x\in\mathbb{R}$, является ограниченной, т.к. $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}$ при всех $x\in\mathbb{R}$ (см. также график). Однако её точные грани $\inf\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}$ и $\sup\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$ не достигаются, и поэтому ни наименьшее, ни наибольшее значения не существуют.

№21. Нет, не прав. Решим задачу иначе. Найдём производную этой функции:

$$y'=\left(x^2+3+\frac{1}{x^2+3}\right)'=2x-\frac{1}{(x^2+3)^2}\cdot 2x=2x\cdot\frac{(x^2+3)^2-1}{(x^2+3)^2}=$$

$$=2x\cdot\frac{(x^2+3+1)(x^2+3-1)}{(x^2+3)^2}=\frac{2x(x^2+4)(x^2+2)}{(x^2+3)^2}.$$

При $x>0$ производная положительна, а значит, функция возрастает при $x\geq 0$. При этом функция является чётной ($y(-x)\equiv y(x)$), следовательно, при $x\leq 0$ она убывает. Таким образом, в точке $x=0$ она имеет локальный минимум (и одновременно наименьшее значение), равный $y(0)=3\frac{1}{3}$. Вывод: оценка, полученная студентом с помощью неравенства, верная, однако она не позволяет найти в этой задаче наименьшее значение функции.

№22. Функция $y=f(x)$, определённая на множестве X, симметричном относительно точки $x=0$, называется *чётной* (*нечётной*), если при всех $x\in X$ выполняется равенство $f(-x)=f(x)$ (соответственно, $f(-x)=-f(x)$). Функцию, не являющуюся ни чётной, ни нечётной, будем называть функцией *общего вида*. График чётной функции всегда симметричен относительно оси ординат Oy, а нечётной – имеет центр симметрии в начале координат $(0, 0)$.

Примеры чётных функций: $y = |x|$, $y = x^2$, $y = 1/x^4$, $y = \cos x$. Заметим, что любая сложная функция вида $y = f(g(x))$ будет чётной, если «внутренняя» функция $g(x)$ – чётная (при любой «внешней» функции $y = f(g)$). Например, $y = \sqrt[3]{\cos x - 1} + 5$ – чётная функция, так как её можно представить в виде $y = f(g(x))$, где $f(g) = \sqrt[3]{g - 1} + 5$, и «внутренняя» функция $g(x) = \cos x$ – чётная.

Выясним, является ли функция $y = \log_2(x + \sqrt{1 + x^2})$ чётной или нечётной. Найдём $y(-x)$ и сравним с $y(x)$.

$$y(-x) = \log_2(-x + \sqrt{1 + (-x)^2}) = \log_2(\sqrt{1 + x^2} - x) =$$

(умножим и разделим под знаком логарифма на сопряжённое выражение:)

$$= \log_2 \frac{(\sqrt{1 + x^2} - x)(\sqrt{1 + x^2} + x)}{(\sqrt{1 + x^2} + x)} = \log_2 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} =$$

$$= \log_2 \left((\sqrt{1 + x^2} + x)^{-1}\right) = -\log_2(\sqrt{1 + x^2} + x) = -y(x),$$

т.е. функция является нечётной.

№23. Пусть x – произвольное действительное число. Выпишем $y(-x)$ и сравним с $y(x)$:

$$y(-x) = |(-x) - 2| - 3| - x| + |(-x) + 2| =$$

(в силу свойства модуля $| - x| = |x|$ под каждым модулем изменим знак)

$$= |x + 2| - 3|x| + |x - 2| = y(x).$$

Это означает, по определению чётной функции, что функция является чётной.

№24. Если функция $y = f(x)$ определена на множестве X, симметричном относительно $x = 0$, то её всегда можно представить (причём единственным образом!) в виде суммы чётной и нечётной функций:

$$f(x) \equiv \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

где $\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ – чётная функция, а $\psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ – нечётная функция. В данном случае, так как функция $y = 3^x$ определена на всём множестве действительных чисел, то её можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций. Для этого воспользуемся приведённым выше тождеством:

$$3^x = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} + \frac{3^x - 3^{-x}}{2} = \varphi(x) + \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ – чётная функция, а $\psi(x)$ – нечётная функция.

№25. Поскольку функция $f(x)$ является чётной, то при всех x выполняется тождество $f(-x) = f(x)$. С другой стороны, эта же функция является нечётной, и поэтому верно тождество $f(-x) = -f(x)$. Отсюда получаем, что $\forall x \in \mathbb{R}$ верно $f(x) \equiv 0$. Осталось проверить и убедиться в том, что эта функция является невозрастающей, неубывающей и периодической.

№26. 1) Вначале построим график функции $f(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq 2$ (сначала строим график $y = |x|$, затем сдвигом вправо на единицу строим график $y = |x - 1|$, затем отражаем его симметрично оси Ox и получаем график $y = -|x - 1|$ и, наконец, поднимаем его вверх на единицу, получив $y = 1 - |x - 1|$).

2) Так как функция нечётная, то продолжим её нечётным образом на отрезок $-2 \leq x \leq 0$. Таким образом, график построен на отрезке $-2 \leq x \leq 2$, длина которого равна периоду $T = 4$.

3) Периодически продолжаем график влево и вправо. График функции построен.

№27. Приравняем функции и сведём к эквивалентной задаче: найти, при каких значениях параметра m полученное уравнение $(m-19)x = 5$ не имеет решений. Как известно, линейное уравнение $Ax = B$ не имеет решений тогда и только тогда, когда $A = 0$, $B \neq 0$. В данном случае это условие выглядит так:

$$\begin{cases} m - 19 = 0, \\ 5 \neq 0. \end{cases}$$

Ответ: при $m = 19$.

4 СЕМИНАР: Предел и непрерывность функции одного действительного переменного

Раздел: Математический анализ функций одной действительной переменной. Предел и непрерывность.

I. Предел функции. Определения предела функции (по Коши и по Гейне), графический смысл предельного значения. Арифметические операции над функциями, имеющими предельные значения в заданной точке. Предельный переход в неравенствах. Замечательные пределы. Раскрытие неопределённостей $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, $\infty - \infty$ и др. (кроме правила Лопиталя и формулы Тейлора).

II. Непрерывность функции одной переменной. Понятие непрерывности функции в точке и на множестве (по Гейне и по Коши). Основные свойства непрерывных функций (арифметические операции над непрерывными функциями, суперпозиция непрерывных функций, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса, теорема о сохранении знака непрерывной в точке функции, 1-я теорема Больцано-Коши о существовании нуля у непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка. 2-я теорема Больцано-Коши о промежуточном значении). Классификация точек разрыва. Разрывность функции Дирихле.

Практика.

1. Демонстрация основных приёмов вычисления пределов функций. Использование 1-го и 2-го замечательных и других известных пределов.
2. Решение задач на исследование функций на непрерывность, нахождение точек разрыва (с установлением их типа).

Контроль знаний: проверка домашнего задания.

Литература.

[4]: Раздел II (Введение в анализ), Гл. 6 (Пределы и непрерыв.)

[5]: Гл. 4 (Функция), §2 (Предел и непрерывность функции), §3 (Сравнение бесконечно малых):

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 4.

Как выполнять домашнее задание. *Вы читаете условие задачи и пробуете её решить. Если вы испытываете сложности, то тогда вы можете заглянуть в решение и разобрать его. Никогда не пытайтесь сразу смотреть в решение, если хотите получить положительный результат! Если остались вопросы, спросите у вашего преподавателя. Перед решением задач рекомендуется прочитать лекцию по соответствующему разделу.*

4.1 Задачи на определение и вычисление предела функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$ и a – предельная точка этого множества (т.е. в любой, сколь угодно малой окрестности точки a находится хотя бы одна точка из X, отличная от a). Сама точка a может как принадлежать, так и не принадлежать X.

Опр. 1' (*конечного предела функции в точке* по Коши[1], или на языке «$\varepsilon - \delta$»). Число b называется *пределом* (*предельным значением*) функции $y = f(x)$ в точке a (или при x, стремящемся к a), если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Опр. 1" (*конечного предела функции в точке* по Гейне[2], или на языке последовательностей). Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любой последовательности значений аргумента x_n, сходящейся к a и состоящей из чисел, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к числу b.

Для предела функции используются обозначения:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \text{или} \quad f(x) \to b \text{ при } x \to a.$$

№1. С помощью «$\varepsilon - \delta$» рассуждений (т.е. используя определение предела) докажите, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 2} x^2 = 4; \quad \text{б) } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1.$$

Решение. а) Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела, достаточно показать, что для выбранного ε найдётся такое положительное число δ, зависящее от ε, что как только $0 < |x - 2| < \delta$ (т.е. как только x попало в проколотую δ-окрестность точки 2), так сразу значение x^2 будет отличаться по модулю от числа 4 меньше, чем на ε, т.е. $|x^2 - 4| < \varepsilon$. В самом деле,

$$|x^2 - 4| = |(x-2)((x-2)+4)| \le |x-2|(|x-2|+4) < \delta(\delta+4) < \varepsilon.$$

[1] *Коши Огюстен Луи* (1789–1857) – французский математик.
[2] *Гейне Генрих Эдуард* (1821–1881) – немецкий математик.

Чтобы найти искомое $\delta = \delta(\varepsilon)$, решим неравенство $\delta(\delta + 4) < \varepsilon$, или $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon < 0$, рассмотрев его как квадратное относительно δ. Получим (с учётом положительности δ): $0 < \delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$. Итак, мы показали, как по заданному произвольному $\varepsilon > 0$ выбрать соответствующее $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось определение предела.

№2. Сформулируйте на языке «$\varepsilon - \delta$» следующие утверждения (т.е. приведите определения по Коши перечисленных ниже пределов):

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$; г) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x$ такого, что $0 < |x - a| < \delta$, выполняется $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$$\text{б)}\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall E > 0\ \exists\,\delta = \delta(E) > 0:\ \forall |x| > \delta\ \Rightarrow |f(x)| > E.$$

№3. Найдите предел функции: а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x^2)}{\ln x}$.

Решение. а) Здесь нет неопределённости. Хотя $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует, умножение синуса на бесконечно малую функцию $x \to 0$ приводит к тому, что данный предел существует и равен нулю как произведение бесконечно малой функции x на ограниченную функцию $\sin\dfrac{1}{x}$. Ограниченность синуса следует из неравенства $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le 1$, верного при всех $x \ne 0$.

№4. Найдите предел функции:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x});\quad \text{б)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

Решение. а) Имеем неопределённость вида $\infty - \infty$, для раскрытия которой воспользуемся приёмом домножения (с одновременным делением) на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

№5. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$.

№ 6. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

К задаче 7 (приём использования соотношений эквивалентности).

Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Пусть надо вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x))$, где при $x \to a$ $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ (т.е. имеется неопределённость вида $\frac{0}{0}$). Пусть, далее, при $x \to a$ $f(x) \sim \tilde{f}(x)$, $g(x) \sim \tilde{g}(x)$, тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}.$$

№7. Используя соотношения эквивалентности при $x \to 0$: $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, раскройте неопределённость и вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-1}{e^{5x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x^2)}{\sin^2 3x}$;
д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

Решение. а) Заметим, что при $x \to \frac{1}{2}$ числитель и знаменатель дроби одновременно стремятся к нулю, т.е. имеется неопределённость $\frac{0}{0}$. Далее, при $x \to \frac{1}{2}$ имеем $2x - 1 \to 0$, поэтому, в силу соотношения эквивалентности, $\operatorname{arctg}(2x-1) \sim 2x - 1$. Тогда получим

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{(2x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2}$$

(неопределённость исчезла в момент сокращения дроби на множитель $2x - 1$, который и был причиной этой неопределенности).

б) Так как при $x \to 0$ имеем: $\sin 3x \sim 3x$, $\sin 5x \sim 5x$, то заменим функции под знаком предела эквивалентными им функциями, при этом предел упростится и получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

№8. Используя 1-й замечательный предел, вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. С учётом $\cos x \to 1$ при $x \to 0$ имеем:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

№9. Используя 2-й замечательный предел, вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Решение. а) Под знаком предела стоит показательно-степенная функция, у которой при $x \to \infty$ основание степени $\dfrac{x}{x+1} \to 1$, а показатель степени $x \to \infty$. Это значит, что имеется неопределённость вида 1^∞. Раскроем её, используя 2-й замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}.$$

б) *Указание*: внести $\dfrac{1}{x}$ под знак логарифма.

в) *Указание*: сделать замену $t = e^x - 1$.

№10. Вычислите предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

Указание: сделать замену $t = \sqrt[3]{1+x}$.

4.2 Задачи на непрерывность функции и точки разрыва

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, точка a принадлежит X, причём является его предельной точкой. Тогда функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если эта функция имеет в точке a предел и этот предел равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $X \subseteq \mathbb{R}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются *точками разрыва* функции.

№11. Сформулируйте определение (по Коши) того, что функция $y = f(x)$ является непрерывной в точке x_0. Докажите, используя это определение, что:

а) функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x_0 = 1$;

б) функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке $x = x_0$.

№12. Сформулируйте определение непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 по Гейне. Используя это определение, докажите, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально}, \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально} \end{cases}$$

разрывна в любой точке.

№13. Может ли функция, определённая на всей числовой прямой, быть непрерывной в единственной точке? Рассмотреть функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x - \text{рационально}, \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально} \end{cases}$$

и, воспользовавшись определением непрерывности в точке по Гейне, показать, что эта функция непрерывна только в точке $x = 0$.

№14. Приведите классификацию точек разрыва. Исследуйте на непрерывность и охарактеризуйте точки разрыва функции:

$$\text{а) } y = \frac{1}{x},\ \text{б) } y = \operatorname{sgn} x,\ \text{в) } y = e^{\frac{1}{x-1}},\ \text{г) } y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1},\ \text{д) } y = x\sin\frac{1}{x},$$

$$\text{е)}\quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ -1, & \text{если } x = 0; \end{cases} \qquad \text{ж)}\quad y = \sin\frac{1}{x}.$$

№15. Сформулируйте 1-ю и 2-ю теоремы Вейерштрáсса. Применимы ли эти теоремы к функции $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке:

$$\text{а) } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],\ \text{б) } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]?$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ:

I. Задачи на определение и вычисление предела функции.

№1. б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела, достаточно показать, что для данного ε найдётся положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ (зависящее от ε) такое, что как только $0 < |x - \frac{\pi}{2}| < \delta$ (т.е. как только x попало в проколотую δ-окрестность точки $\frac{\pi}{2}$), так сразу значение $\sin x$ будет отличаться по модулю от числа 1 меньше, чем на ε, т.е. $|\sin x - 1| < \varepsilon$. В самом деле,

$$|\sin x - 1| = \left|\sin x - \sin\frac{\pi}{2}\right| = \left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right|\left|\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right| \leq$$

(воспользуемся неравенством $|\sin\alpha| \leq |\alpha|$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\leq 2\cdot\left|\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right| = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \delta = \varepsilon.$$

Итак, если задано произвольное $\varepsilon > 0$, то выберем $\delta = \varepsilon$ и тогда определение предела полностью выполняется. Равенство доказано.

№2. в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\, x$ такого, что $x > \delta$, выполняется $|f(x) - b| < \varepsilon$.

г) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall E > 0\ \exists\,\delta = \delta(E) > 0 :\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E$.

№3. б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x^2)}{\ln x}$. Здесь также нет неопределённости. Несмотря на то, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x^2)$ не существует, умножение косинуса на бесконечно малую при $x \to +\infty$ функцию $\frac{1}{\ln x}$ приводит к тому, что данный предел существует и равен нулю как произведение бесконечно малой функции $\frac{1}{\ln x}$ на ограниченную функцию $\cos(x^2)$. Ограниченность косинуса доказывается неравенством $\left|\cos(x^2)\right| \leq 1$, верного при всех $x \in \mathbb{R}$.

№4. б) Имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой воспользуемся приёмом умножения (деления) на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x}+1) = +\infty.$$

№ 5. Вычислим пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$; б) $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$;

г) $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

№6. Вычислим пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = 1$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{2}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$.

№7. в) Имеем неопределённость $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой применим соотношение эквивалентности: $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2}-1}{e^{5x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{5} = 0;$$

г) Имеем неопределённость $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой применим соотношения эквивалентности: $\operatorname{tg} x \sim x$, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{\sin^2 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(3x)^2} = \frac{1}{9};$$

д) Имеем неопределённость $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой применим соотношение эквивалентности: $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0.$$

№8. б) Имеем неопределённость $\frac{0}{0}$. Чтобы вычислить этот предел, сначала преобразуем выражение под знаком предела по формуле понижения степени $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$, а затем воспользуемся соотношением эквивалентности $\sin x \sim x$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{x}{4} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{4} = 0.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\dfrac{3x}{5x}\right)=\dfrac{3}{5}$.

№ 9. б) Имеем неопределённость $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\right)=\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln e=1.$$

в) Имеем неопределённость $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть эту неопределённость и вычислить предел, сделаем замену переменной под знаком предела $t=e^x-1$. Тогда $e^x=1+t$, откуда логарифмируя по основанию e, находим $x=\ln(1+t)$, $t\to 0$. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}=1$$

(в силу предыдущей задачи).

№10. Введём новую переменную $t=\sqrt[3]{1+x}$, тогда $t^3=1+x$, откуда $x=t^3-1$, $t\to 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{1}{3}.$$

№11. Доказательство. а) По определению достаточно показать, что для любого положительного числа ε найдётся зависящее от него число $\delta>0$ такое, что как только x попало в δ-окрестность точки x_0, то соответствующее значение функции $f(x)$ оказалось в ε-окрестности числа $f(x_0)$:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Для функции $y=x^2$ при условиии $x_0=1$ рассмотрим $|f(x)-f(x_0)|$:

$$|f(x)-f(1)|=|x^2-1|=|(x-1)(x+1)|=|x-1||(x-1)+2)|\le$$

$$\le|x-1|(|x-1|+2)<\delta(\delta+2)<\varepsilon.$$

Решим последнее неравенство и из него найдём искомое $\delta=\delta(\varepsilon)$: $\delta\in(0,\sqrt{1+\varepsilon}-1)$. Мы показали, как по заданному ε найти $\delta(\varepsilon)$, чтобы выполнялось условие непрерывности функции $y=x^2$ в точке $x_0=1$

($\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$), тем самым доказав непрерывность этой функции в указанной точке.

б) Докажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке $x = x_0$. Достаточно показать, что в точке x_0 выполняется условие непрерывности функции $y = \sin x$: $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. Подробнее, расшифровывая определение предела, достаточно показать, каким образом для заданного положительного ε найти зависящее от него число $\delta > 0$ такое, что как только x попало в δ-окрестность точки x_0 (т.е. $|x - x_0| < \delta$), то соответствующее значение функции $\sin x$ окажется в ε-окрестности числа $\sin x_0$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

Рассмотрим выражение $|\sin x - \sin x_0|$:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leq$$

$$\leq 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Итак, пусть некоторое (произвольное) $\varepsilon > 0$ выбрано. Тогда, если взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, то, в силу проведённых выше выкладок, будет выполняться условие непрерывности функции $y = \sin x$ в точке x_0, что доказывает непрерывность этой функции в этой точке.

№12. Определение (*непрерывности в точке по Гейне*). Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если для любой сходящейся к a последовательности x_n значений её аргумента соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к значению $f(a)$.

Доказательство. Возьмём произвольную точку $x = x_0$. Выберем произвольную последовательность x'_n, сходящуюся к точке x_0 и состоящую только из рациональных чисел. Тогда соответствующая последовательность значений функции $f(x'_n) = 1 \to 1$. Теперь возьмём произвольную последовательность x''_n, сходящуюся к точке x_0 и состоящую только из иррациональных чисел. Соответствующая последовательность значений функции $f(x''_n) = 0 \to 0$. Если бы предел функции Дирихле в точке x_0 существовал, то независимо от способа стремления x к x_0 значения функции стремились бы к одному и тому же пределу. В данном случае это не так, что доказывает отсутствие предела в точке x_0. Следовательно, условие непрерывности функции в точке x_0 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$) не выполнено, а значит, эта функция разрывна в точке x_0 (разрыв 2-го рода).

№13. Да, может. Возьмём произвольное $x = x_0 \neq 0$ и покажем, что функция разрывна в этой точке. В самом деле, если выбрать любую последовательность x'_n, состоящую из рациональных чисел и сходящуюся к точке x_0, то соответствующая последовательность $f(x'_n) = x'_n$ значений функции будет сходиться к числу x_0. С другой стороны, если взять любую последовательность x''_n, состоящую из иррациональных чисел, сходящуюся к точке x_0, то отвечающая ей последовательность $f(x''_n)$ значений функции будет состоять из нулей и поэтому сходиться к числу 0. Так как предел функции не должен зависеть от способа стремления x к x_0, а в данном случае зависит, то это доказывает отсутствие предела. В точках, где нет предела, нарушается условие непрерывности, т.е. функция терпит разрыв.

Если же взять точку $x_0 = 0$, то как бы мы ни выбирали последовательность действительных чисел x_n, сходящуюся к этой точке, соответствующая последовательность $f(x_n)$ значений функции будет сходиться к нулю, т.е. к значению функции в точке 0. Это доказывает непрерывность функции в точке $x_0 = 0$.

№14. Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются *точками разрыва* функции. Выделяют следующие виды точек разрыва.

1) *Точки разрыва 1-го рода, или «скачок».* Если в точке $x = a$ существуют конечные неравные между собой односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$, то точка a называется *точкой разрыва 1-го рода.*

Например, функция $y = \operatorname{sgn} x$ имеет в точке $x = 0$ разрыв 1-го рода.

2) *Точки разрыва 2-го рода.* Если в точке $x = a$ хотя бы один из односторонних пределов $f(a-0)$ или $f(a+0)$ не существует или равен бесконечности, то точка a называется *точкой разрыва 2-го рода.*

Например, для функции $y = 1/x$ точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода, так как $\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода и для функции $y = \sin\frac{1}{x}$, поскольку $\lim\limits_{x\to+0} \sin\frac{1}{x}$ не существует.

3) *Точки устранимого разрыва.* Если в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет предел, но он или не совпадает со значением функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, или же функция $f(x)$ не определена в точке

a, то точка a называется точкой *устранимого разрыва.* В этом случае функцию можно доопределить до непрерывной, положив в точке a её значение равным пределу в этой точке.

Решение. а) Данная функция определена и непрерывна как элементарная функция во всех точках, кроме точки $x = 0$. В точке $x = 0$ условие непрерывности $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = f(0)$ не выполняется, так как не определено значение $f(0)$. Следовательно, функция разрывна в этой точке. Далее, выясним, какого типа эта точка разрыва. Для этого вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$. Так как он равен ∞, то это разрыв 2-го рода.

б) Как и предыдущая функция, сигнум определён и непрерывен во всех точках, кроме $x = 0$. Чтобы выяснить тип этой точки разрыва, найдём оба односторонних предела в этой точке:

$$\lim_{x\to -0} \operatorname{sgn} x = -1, \quad \lim_{x\to +0} \operatorname{sgn} x = 1.$$

Так как эти пределы существуют, конечны, но не равны, то точка $x = 0$ является точкой разрыва 1-го рода (типа «скачок»).

в) $y = e^{\frac{1}{x-1}}$. Данная функция определёна и непрерывна во всех точках, кроме $x = 1$. Чтобы выяснить тип этой точки разрыва, вычислим оба односторонних предела в этой точке:
при $x \to 1 - 0 \Rightarrow (x-1) \to -0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} \to 0$;
при $x \to 1 + 0 \Rightarrow (x-1) \to +0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty$. Итак,

$$\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \quad \lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty.$$

Поскольку один из односторонних пределов оказался равен бесконечности, то это точка разрыва 2-го рода.

г) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}$. Данная функция определёна и непрерывна во всех точках, кроме $x = -1$. Чтобы выяснить тип этой точки разрыва, вычислим оба односторонних предела в этой точке:
при $x \to -1 - 0 \Rightarrow (x+1) \to -0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} \to -\infty \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} \to -\frac{\pi}{2}$;
при $x \to -1 + 0 \Rightarrow (x+1) \to +0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} \to +\infty \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} \to \frac{\pi}{2}$.
Таким образом, в точке $x = -1$ существуют конечные неравные между собой односторонние пределы $f(-1-0) = -\frac{\pi}{2}$ и $f(-1+0) = \frac{\pi}{2}$, поэтому точка $x = -1$ является *точкой разрыва 1-го рода.*

д) $y = x \sin \frac{1}{x}$. Функция имеет единственную точку разрыва: $x = 0$, в которой не определена. Выясним, разрыв какого типа в этой точке.

Для этого вычислим предел функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

как предел произведения бесконечно малой функции x на ограниченную функцию $\sin\dfrac{1}{x}$ (ограниченность следует из того, что при всех $x \neq 0$ $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$). Поскольку предел функции в точке $x = 0$ существует и конечен, то $x = 0$ – точка устранимого разрыва.

е) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ -1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Выясним поведение функции в окрестности точки $x = 0$. Вычислим предел функции при $x \to 0$: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. Поскольку предел функции в точке $x = 0$ существует и конечен, но $f(0) \neq 0$ то $x = 0$ – точка устранимого разрыва.

ж) $y = \sin\dfrac{1}{x}$. Выясним поведение функции в окрестности точки $x = 0$: при $x \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} \to \infty$. Но предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует. Поэтому $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

№15. *1-я теорема Вейерштра́сса.* Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте.

2-я теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она достигает на этом сегменте своих точной верхней и нижней граней, т.е. найдутся такие $x', x'' \in [a, b]$, что

$$f(x') = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x'') = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Проверим, применимы ли 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса к функции $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке: а) $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, б) $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$?

Ответ: а) да, так как функция непрерывна на этом отрезке, то она ограничена на нём и достигает своих точных граней (являющихся в этом случае наибольшим и наименьшим значениями);

б) нет, так как функция не является непрерывной на указанном отрезке (более того, на концах отрезка функция не определена).

5 СЕМИНАР: Дифференцируемость функций одной переменной

Раздел: Математический анализ функций одной действительной переменной. Дифференциальное исчисление.

I. Понятие производной. Определение, физический и геометрический смысл производной. Односторонние производные. Равенство односторонних производных как необходимое и достаточное условие существования производной в точке. Правила нахождения производных. Таблица производных элементарных функций (включая производные обратных тригонометрических и гиперболических функций). Производные показательно-степенных функций. Касательная и нормаль к графику и их уравнения.

II. Дифференциал. Дифференцируемость функций в точке и на множестве. Эквивалентность дифференцируемости существованию конечной производной в точке. Связь непрерывности и дифференцируемости. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

III. Производные и дифференциалы высших порядков. Понятие о производных и дифференциалах высших порядков. Формулы Лейбница для вычисления производных и дифференциалов высших порядков от произведения двух функций. Основные теоремы о дифференцируемых функциях (Ферма́, Ро́лля, Лагра́нжа и др.). Формула Тейлора. Разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена. Понятие аси́мптот графика функции.

ЛИТЕРАТУРА:

[4]: Раздел III. Дифференциальное исчисление. Гл. 7 (Производная) §7.1-7.3; Гл. 8 (Приложение производной), §8.1 (Основные теоремы дифференциального исчисления), §8.2 (Правило Лопиталя), §8.3 (Интервалы монотонности и экстремумы функции), §8.4 (Интервалы выпуклости, точки перегиба), §8.5 (Аси́мптоты. Исследование функций и построение их графиков). Гл. 9 (Дифференциал функции)

[5]: Гл. 5 (Дифференцирование), §1–6

Контроль знаний: проверка выполнения домашнего задания.

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 5.

Как выполнять домашнее задание. *Вы читаете условие задачи и пробуете её решить. Если вы испытываете сложности, то тогда вы можете заглянуть в решение и разобрать его. Никогда не пытайтесь сразу смотреть в решение, если хотите получить положительный результат! Если остались вопросы, спросите у вашего преподавателя. Перед решением задач рекомендуется прочитать лекцию по соответствующему разделу.*

5.1 Производная. Задачи на исследование дифференцируемости функции

Опр.1 (*производной*). Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) и точка $x_0 \in (a, b)$. Дадим *приращение* Δx *аргументу* в точке x_0 и получим новую точку $x_0 + \Delta x$. Приращение аргумента Δx будем считать достаточно малым, положительным или отрицательным, так чтобы $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$. Назовём *приращением функции* $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Рассмотрим предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел существует, то его называют *производной* функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ и пишут:

$$f'(x_0),\ f'(x)\Big|_{x=x_0},\ y'(x_0),\ \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0},\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}.$$

Обозначим $x = x_0 + \Delta x$, тогда $\Delta x = x - x_0$ и получаем эквивалентное определение производной:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Правой (*левой*) *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется, соответственно, число, равное правому (левому) пределу:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Теорема 1 (*необходимое и достаточное условие существования производной в точке*). Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда её односторонние производные в этой точке существуют и равны: $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ $(= f'(x_0))$.

Опр.2 (*дифференциала и дифференцируемости функции*). Пусть приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в точке x_0 можно представить в виде

$$\Delta y = A(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $A(x_0)$ – число, не зависящее от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ функция (т.е. функция, стремящаяся к нулю при $x \to x_0$). Можно доказать, что если функция

$y = f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную, то $A(x_0) = f'(x_0)$. Линейная часть $f'(x_0)\Delta x$ приращения функции называется её *дифференциалом* в данной точке и обозначается $df(x_0)$. *Дифференцируемая* (в точке) функция – это функция, у которой существует дифференциал (в данной точке). Если же производная не существует или бесконечна в точке x_0, то функция называется не дифференцируемой в этой точке. Дифференцируемость функции означает, что для достаточно малых окрестностей данной точки функцию можно заменить линейной.

Теорема 2. Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда функция имеет в точке x_0 конечную производную.

Теорема 3. Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда график функции имеет в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную (вертикальной касательной соответствует бесконечная производная).

Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Теорема 5. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то её первый дифференциал в этой точке находится по формуле: $dy(x_0) = y'(x_0)dx$.

№1. Сформулируйте понятие производной в точке. Что значит, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$? Докажите, что функция $y = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ непрерывна, но не дифференцируема при $x = 3$.

№2. Докажите, что функция $y = \cos 2x$ непрерывна и дифференцируема в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$.

№3. Используя определение производной, найдите производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = x_0$.

Указание. Воспользоваться определением первой производной:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

№4. Объясните, почему функция не дифференцируема ни в одной точке: а) $y = \sqrt{\log_2(\sin x)}$;

б) функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Указание: а) найдите область определения функции и воспользуйтесь теоремой: для того чтобы функция могла быть дифференцируемой в точке x_0 своей области определения, она должна быть как минимум определена в двусторонней окрестности этой точки.

б) Воспользуйтесь теоремой о том, что если функция дифференцируема в некоторой точке, то она обязательно непрерывна в этой точке.

№5. Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определите в точке $x = 1$:

1) приращение функции $\Delta f(1)$; 2) дифференциал $df(1)$.

№6. Докажите, что функция $y = |x-1|$ не дифференцируема в точке $x = 1$. *Указание*: найдите односторонние производные и покажите, что они не равны.

№7. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x = x_0$?

5.2 Задачи на вычисление производных и дифференциалов 1-го порядка

Таблица производных элементарных функций.

1. Степенная функция: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

2. Показательная функция: $(a^x)' = a^x \ln a$ $(0 < a \neq 1)$, в частности, $(e^x)' = e^x$.

3. Логарифмическая функция: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(0 < a \neq 1,\ x > 0)$, в частности, $(\ln x)' = 1/x$.

Тригонометрические функции:
4. $(\sin x)' = \cos x,\ \ x \in \mathbb{R}$;
5. $(\cos x)' = -\sin x,\ \ x \in \mathbb{R}$;
6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(\cos x \neq 0)$;
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(\sin x \neq 0)$.

Обратные тригонометрические функции:
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ x \in (-1, 1)$;
9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ x \in (-1, 1)$;
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ \ x \in \mathbb{R}$;
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2},\ \ x \in \mathbb{R}$.

Гиперболические функции:
12. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\ \ x \in \mathbb{R}$;
13. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\ \ x \in \mathbb{R}$;
14. $(\operatorname{th} x)' = 1/\operatorname{ch}^2 x,\ \ x \in \mathbb{R}$;
15. $(\operatorname{cth} x)' = -1/\operatorname{sh}^2 x,\ \ x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$.

Дифференциал 1-го порядка дифференцируемой в точке x функции $f(x)$ вычисляется по формуле $df(x) = f'(x)dx$.

Правила вычисления производных: $(u \pm v)' = u' \pm v'$ (производная суммы, разности двух дифференцируемых функций), $(uv)' = u'v + v'u$ (производная произведения), $\left(\dfrac{u}{v}\right)' =$

$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ (производная частного), а также $(c \cdot y(x))' = c \cdot y'(x)$, где $c = const$ (константу при дифференцировании можно выносить за скобку), $(c)' = 0$ (производная константы равна нулю).

Правила вычисления дифференциалов: $d(u \pm v) = du \pm dv$ (дифференциал суммы, разности), $d(uv) = vdu + udv$ (дифференциал произведения), $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$ (дифференциал частного).

Производная функции $y = y(x)$, *заданной параметрическими уравнениями* $x = x(t)$, $y = y(t)$, вычисляется по формуле: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Если функция $y = y(x)$ *задана неявно уравнением* $F(x, y) = 0$, то чтобы найти её производную, надо продифференцировать данное уравнение по переменной x и из полученного равенства выразить искомую производную $y'(x)$.

№8. Найдите производные явно заданных функций, указав их области определения (дифференцируемости):

$$\text{а) } y = 5\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x} + 7; \quad \text{б) } y = x \sin x; \quad \text{в) } y = \frac{\ln x - 1}{\cos x}.$$

№9. Вычислите производную функции, используя правило дифференцирования степенной функции $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$:

$$y = x^7 - 2x^5 + 5 - \frac{8}{x^3} + \frac{5}{6} x \sqrt[5]{x}.$$

№10. Вычислите производную функции там, где она определена:

$$y = 5^x - 7 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x + \operatorname{arctg} x.$$

№11. Найдите производную функции и укажите область, где она существует:

$$y = 3 + 4x^2 + \sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^2} + \sin x + \cos x + \ln x.$$

№12. Найдите производную функции $y = 4e^x + \operatorname{arctg} x + \arcsin x$.

№13. Найдите производную функции $y = x \arccos x$.

№14. Найдите производную функции $y = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$.

№15. Найдите производную функции $y = \cos^{100} x$.

№16. Найдите производную функции $y = \ln(\operatorname{tg} 5x)$.

№17. Найдите производную функции $y = e^{\operatorname{tg} x}$.

№18. Вычислите производную функции $y = 3x^3 \ln x - x^3$.

№19. Вычислите производную функции $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

№20. Найдите производные функций, предварительно упростив их и приведя к виду, удобному для дифференцирования:

$$\text{а) } y = \sin^4 x + \cos^4 x; \text{ б) } y = \lg(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x); \text{ в) } y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

№21. Найдите производные сложных функций: а) $y = \ln(\ln(\ln x))$;

$$\text{б) } y = \sin^5 x; \quad \text{в) } y = \operatorname{ctg}(7x^2 - 6x + 1); \quad \text{г) } y = 5^{\cos 13x}.$$

№22. Найдите производные сложных функций (ответ не упрощать):

$$\text{а) } y = \log_7(\cos^5 x); \quad \text{б) } y = \arcsin(\sin^2 x); \quad \text{в) } y = \operatorname{arctg}(2^x).$$

№23. Вычислите производную сложной функции $y = \ln \operatorname{tg} 2x$.

№24. Вычислите производную сложной функции $y = 3^{\arccos 2x}$.

№25. Найдите производные показательно-степенны́х функций, используя предварительное логарифмирование:

$$\text{а) } y = x^x \ (x > 0); \quad \text{б) } y = x^{\sin x} \ (x > 0); \quad \text{в) } y = (1 + x^2)^{\cos x}.$$

№26. Вычислите производную показательно-степенно́й функции

$$y = x^{\frac{1}{x}}.$$

№27. Найдите производную $y'(x)$ функции, заданной неявно уравнением $xy^2 - 5x + \ln y = 0$ $(y > 0)$.

№28. Найдите $y'(x)$ и $y''(x)$, а также dy и d^2y, если функция задана неявно уравнением: а) $y + \ln y + x^2 = 0$; б) $2y + \cos y + 2x = 0$.

№29. Найдите производную неявной функции $x \cos y - y \sin x = 0$.

№30. Найдите производную $y'(x)$ параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + 2t, \\ y(t) = \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

в произвольной точке t. Чему равно значение y'_x при $t = 0$?

№31. Найдите производную $y'(x)$ функции, заданной параметрически ($t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} x(t) = 2t + 1, \\ y(t) = t^3. \end{cases}$$

№32. Найдите производную функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}, \\ y(t) = e^{3t}. \end{cases}$$

№33. Найдите производную y'_x функции $y = y(x)$ в точке $t = 1$, если функция задана параметрически системой уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 1; \\ y(t) = 3t^3 + 5, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№34. Найдите дифференциал 1-го порядка функции $y = \arcsin(x^2)$.

№35. Найдите дифференциал функции $y = \sin^3 2x$.

№36. Найдите дифференциал функции $y = 2^{-x^2}$.

5.3 Задачи на вычисление производных и дифференциалов высших порядков

1. Дифференциал 2-го порядка $d^2y(x) = d(dy(x))$ дважды дифференцируемой функции вычисляется по формуле: $d^2y(x) = y''(x)dx^2$.

В общем случае для функции, n раз дифференцируемой в точке x ($n \in \mathbb{N}$), имеем: $d^ny(x) = y^{(n)}(x)dx^n$.

2. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы n раз в точке x, то производная n-го порядка от их произведения может быть найдена по формуле Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

где $u^{(0)} = u(x)$, $v^{(0)} = v(x)$, а дифференциал n-го порядка – по соответствующей формуле

$$d^n(uv) = (uv)^{(n)}dx^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \right) dx^n.$$

где $d^0u = u(x)$, $d^0v = v(x)$.

№37. Найдите производную и дифференциал 2-го порядка функций

а) $y = \sin 5x$; б) $y = 3^{-x} + 2x^6$.

№38. Найдите производную и дифференциал 2-го порядка функции

$$y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1.$$

№39. Найдите дифференциал 2-го порядка функции $y = x^2 \ln x$.

№40. Найдите дифференциал 2-го порядка функции $y = x \sin x$.

№41. Найдите производную 3-го порядка функции $y = e^x \cos x$.

№42. Найдите dy, d^2y, d^ny $(n \in \mathbb{N})$, если а) $y = e^{4x}$; б) $y = 2^x$.

Решение. а) $dy = f'(x)dx = (e^{4x})'dx = 4e^{4x}dx$; $d^2y = (e^{4x})''(dx)^2 = 4^2e^{4x}dx^2$; $d^ny = (e^{4x})^{(n)}(dx)^n = 4^ne^{4x}dx^n$.

№43. Найдите $y^{(n)}(x)$, если а) $y = \sin 5x$; б) $y = e^{3x}$.

№44. Используя формулу Лейбница, найдите производную и дифференциал 100-го порядка функции $y = x^2e^x$. Чему равен $d^{100}y(0)$?

№45. Используя формулы Лейбница для вычисления производных и дифференциалов высших порядков, найдите $y^{(20)}(x)$ и $d^{20}y(x)$, если

$$y = x^2e^{2x}.$$

№46. Найдите производную n-го порядка функции $y = xe^x$.

5.4 Задачи на уравнения касательных и нормалей

Уравнение *касательной* в точке $(x_0, y(x_0))$ к графику функции $y = y(x)$:

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0),$$

а уравнение *нормали* (прямой, проходящей через точку касания перпендикулярно касательной):

$$y = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

№47. Составьте уравнения касательной и нормали к заданной явно кривой $y = \ln(1 + x)$ в точке $x_0 = 0$.

№48. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ в точке $t = 0$.

№49. Составьте уравнения касательной и нормали в точке x_0, отвечающей значению параметра $t_0 = \frac{\pi}{2}$, если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

№50. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой, заданной неявно уравнением $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$, в точке $M_0(1, -1)$.

Указание: найти производную $y'(x)$ в точке $M_0(1, -1)$ по правилу дифференцирования неявно заданных функций (для этого следует продифференцировать один раз уравнение по переменной x и выразить из полученного равенства y' через x и y) и затем воспользоваться уравнениями касательной и нормали.

5.5 Задачи на раскрытие неопределённостей. Правило Лопиталя

Теорема (*1-е правило Лопиталя*). Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и производная $g'(x)$ отлична от нуля всюду в указанной окрестности точки a. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причём эти пределы равны:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема (*2-е правило Лопиталя*). Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ и производная $g'(x)$ отлична от нуля всюду в указанной окрестности точки a. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причём эти пределы равны:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пусть необходимо вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, где при $x \to a$ имеем $f(x) \to 1$, $g(x) \to \infty$. В этом случае принято говорить, что имеется *неопределённость вида* 1^∞. Для её раскрытия используется следующий приём: предел сводится при помощи 2-го замечательного предела к эквивалентному, но более простому пределу вида

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}.$$

№51. Убедитесь в том, что имеется неопределённость, установите её вид и вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+x)}{x}$, используя известный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

№52. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}(x \ln^3 x)$, сведя к неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ и затем используя правило Лопиталя.

Указание: привести предел к виду $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^3 x}{\frac{1}{x}}$ и трижды (пока сохраняется неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$) воспользоваться 2-м правилом Лопиталя.

№53. Найдите предел, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}$.

№54. Раскройте неопределённость $\frac{0}{0}$, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

№55. Раскройте неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}.$$

№56. Вычислите предел, сведя неопределенность $0\cdot\infty$ к неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ и используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to +0} x\ln x.$$

№57. Используя правило Лопиталя, вычислите предел:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{e^x};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}.$$

№58. Докажите, что при $n\in\mathbb{N}$:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^x}=0;\quad \text{б)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$$

(показательная функция на бесконечности растёт быстрее степенно́й функции, а логарифмическая – медленнее степенно́й функции).

№59. Раскройте неопределённость вида $\infty-\infty$, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right).$$

Указание: привести дроби к общему знаменателю и дважды воспользоваться правилом Лопиталя.

№60. Раскройте неопределённость вида 0^0, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x.$$

Указание: используя тождество $a = e^{\ln a}$, преобразовать функцию: $(\sin x)^x = e^{\ln((\sin x)^x)} = e^{x\ln(\sin x)} = e^{\frac{\ln(\sin x)}{1/x}}$ и затем для вычисления предела

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\sin x)}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{1/x}}$$

воспользоваться правилом Лопиталя.

№61. Раскройте неопределённость вида 1^∞: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

№62. Используя формулу Маклорена, найдите разложение в окрестности точки $x = 0$ (т.е. по целым неотрицательным степеням переменной x) функций:

$$\text{а) } f(x) = e^x; \quad \text{б) } f(x) = \sin x$$

до члена с x^3 включительно.

№63. Разложите функцию $f(x) = \sin x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = \dfrac{\pi}{3}$ до членов 3-го порядка включительно.

№64. Используя формулу Маклорена (в окрестности точки $x = 0$), найдите разложение функции $f(x) = e^{2x-x^2}$ до члена с x^3 включительно.

№65. Используя разложения по формуле Маклорена, вычислите

$$\text{а) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}, \quad \text{б) } \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}.$$

5.6 Задачи на теоремы Лагранжа и Ролля

Теорема (*Лагра́нжа*). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во внутренних точках этого сегмента, то внутри этого сегмента найдётся точка ξ такая, что справедлива формула Лагранжа:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Теорема (*Ро́лля*). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во внутренних точках этого сегмента, причём $f(a) = f(b)$, то внутри этого сегмента найдётся точка ξ, производная $f'(\xi)$ в которой равна нулю.

Теорема Ролля имеет простой геометрический смысл: если на концах отрезка функция принимает равные значения, то на кривой $y = f(x)$ найдётся точка, в которой касательная к кривой параллельна оси абсцисс Ox.

№66. Применяя теорему Лагранжа на произвольном отрезке $[x, y]$, доказать неравенства:

$$\text{а) } |\sin x - \sin y| \le |x - y|; \quad \text{б) } |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \le |x - y|.$$

№67. Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ при $-1 \le x \le 1$. Объясните кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

5.7 Задачи на производную обратной функции

Теорема о производной обратной функции: производные взаимно обратных функций $y(x)$ и $x(y)$ связаны друг с другом равенством ($\frac{dx}{dy} \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \tag{1}$$

№68. Используя теорему о производной обратной функции и формулы $\cos(\arcsin\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$, $\cos(\operatorname{arctg}\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, докажите:

$$\text{а) } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (|x| < 1), \quad \text{б) } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\ (x \in \mathbb{R}).$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ:

I. Задачи на исследование дифференцируемости функции.

№1. *Решение.* 1) Докажем непрерывность, используя условие непрерывности функции в точке, а именно: функция $y = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ непрерывна в точке $x = 3$, если $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$. В данном случае имеем $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[3]{(x-3)^2} = 0$ – верно, т.е. функция непрерывна в точке $x = 3$.

Можно было доказать непрерывность в точке $x = 3$ более строго, опираясь на определение непрерывности по Коши (на языке «$\varepsilon - \delta$»). Тогда функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 3$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся отвечающее ему $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $|x-3| < \delta$ (т.е. как только значение x попало в δ-окрестность точки $x = 3$), то выполняется неравенство $|f(x) - f(3)| < \varepsilon$ (т.е. $f(x)$ попало в ε-окрестность $f(3)$). В самом деле, имеем

$$|f(x) - f(3)| = |\sqrt[3]{(x-3)^2} - 0| = \sqrt[3]{(x-3)^2} = \sqrt[3]{|x-3|^2} < \sqrt[3]{\delta^2} = \delta^{\frac{2}{3}} < \varepsilon.$$

Решая последнее неравенство $\delta^{\frac{2}{3}} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \delta^2 < \varepsilon^3$, находим $\delta < \varepsilon^{\frac{3}{2}}$. Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$, если выбирать $\delta(\varepsilon)$ из условия $0 < \delta < \varepsilon^{\frac{3}{2}}$, получим выполнение определения, что и доказывает непрерывность функции в точке $x = 3$.

2) Докажем недифференцируемость функции в точке $x = 3$, вычислив производную в этой точке (используя определение производной):

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2} - 0}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^{\frac{2}{3}}}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} = \infty.$$

Так как производная оказалась бесконечной, то это означает, что функция не дифференцируема в данной точке.

№2. *1-й способ.* Докажем дифференцируемость функции $y = \cos 2x$ в точке $x = \pi/2$, вычислив производную в этой точке (по определению производной, т.е. как предел отношения приращения функции к приращению аргумента) и показав, что эта производная принимает конечное значение:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x - \cos\pi}{x - \frac{\pi}{2}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\frac{2x-\pi}{2}\sin\frac{2x+\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(x-\frac{\pi}{2})\sin(x+\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} =$$

(так как $\sin(x-\frac{\pi}{2}) \sim x-\frac{\pi}{2}$ при $x \to \pi/2$)

$$= -2 \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\pi = 0.$$

2-й способ. Докажем дифференцируемость функции $y = \cos 2x$ в точке $x = \pi/2$, вычислив производную по правилам дифференцирования (сложной функции):

$$(\cos 2x)' = -2\sin 2x\Big|_{x=\pi/2} = -2\sin\pi = 0.$$

Мы доказали дифференцируемость функции в точке $x = \pi/2$. Осталось добавить, что из дифференцируемости следует непрерывность функции в точке $x = \pi/2$.

№3. Используя определение производной, найдём производную функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

№4. а) $y = \sqrt{\log_2(\sin x)}$. Найдём область определения функции: $\log_2(\sin x) \ge 0 \Leftrightarrow \log_2(\sin x) \ge \log_2 1 \Leftrightarrow \sin x \ge 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. То есть функция определена в отдельных точках. Однако, для того чтобы функция могла быть дифференцируемой в точке x_0 своей области определения, она должна быть как минимум определена в двусторонней окрестности этой точки. В данном случае это не выполняется, следовательно, функция не дифференцируема ни в одной точке.

б) функция Дирихле $\quad D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

Мы ранее уже доказывали, что функция Дирихле разрывна в любой точке x. Однако, если функция дифференцируема в некоторой точке, то она обязательно непрерывна в этой точке. Противоречие доказывает недифференцируемость функции во всех точках.

№5. Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определим в точке $x = 1$:

1) приращение функции $\Delta f(1)$; 2) дифференциал $df(1)$.

1) По определению приращения функции в точке,

$$\Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^3 - 2(1+\Delta x) + 1 =$$

$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

2) По определению дифференциала функции в точке, главная (линейная относительно $\triangle x$) часть приращения функции есть дифференциал. В данном случае это Δx. Итак, $df(1) = \Delta x$.

Задачу нахождения дифференциала в точке $x = 1$ можно было решить, не опираясь на его определение, а с помощью формулы для дифференциала первого порядка: $df(x) = f'(x)dx$. Найдя предварительно $f'(1) = (3x^2-2)|_{x=1} = 1$, получаем тот же результат: $df(1) = f'(1)\cdot\triangle x = \triangle x (= dx)$.

№6. Чтобы доказать недифференцируемость функции $y = |x-1|$ в точке $x = 1$, найдём её односторонние производные в этой точке и покажем, что они не равны:

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0}\frac{|x-1|-0}{x-1} = \lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{x-1} = 1;$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0}\frac{|x-1|-0}{x-1} = \lim_{x\to 1-0}\frac{1-x}{x-1} = -1.$$

Так как правая и левая производные не равны в точке $x = 1$, то это означает, что функция не дифференцируема в этой точке.

№7. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \le x_0; \\ ax+b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$ Подберём коэффициенты a и b так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x = x_0$.

1) Запишем в точке $x = x_0$ условие непрерывности:

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; x_0^2 = ax_0 + b. \tag{1}$$

2) Выпишем условие дифференцируемости в точке $x = x_0$: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Для этого найдём, по определению, обе односторонние производные:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0-0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = 2x_0,$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{ax+b-(ax_0+b)}{x-x_0} = a.$$

Тогда условие дифференцируемости примет вид:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \;\Leftrightarrow\; 2x_0 = a. \tag{2}$$

Решая систему (1)-(2), находим $a = 2x_0$, $b = -x_0^2$.

Замечание. Дифференцируемость функции при $x = x_0$ означает, что в точке $(x_0, f(x_0))$, где парабола «переходит» в прямую, эти две кривые имеют общую касательную.

№8. Решение. а) $y' = 5\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 2\left(x^{-1}\right)' + 7' = 5\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2\left(-x^{-2}\right) = = \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2}$, $x \neq 0$; б) $y' = (x)'\cdot \operatorname{sh} x + x\cdot(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{sh} x + x\operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$;

в) при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, ...$, имеем:

$$y' = \frac{(\ln x - 1)'\cos x - (\ln x - 1)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\frac{\cos x}{x} + (\ln x - 1)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x(\ln x - 1)\sin x}{x\cos^2 x}.$$

№9. $y = x^7 - 2x^5 + 5 - \frac{8}{x^3} + \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} \Rightarrow y' = 7x^6 - 10x^4 + \frac{24}{x^4} + \sqrt[5]{x}$, $x \neq 0$.

№10. $y = 5^x - 7\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x + \operatorname{arctg} x \Rightarrow y' = 5^x\ln 5 - \frac{7}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{1}{1+x^2}$, $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

№11. $y = 3 + 4x^2 + x^{\frac{3}{5}} + x^{-2} + \sin x + \cos x + \ln x \Rightarrow y' = 8x + \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{2}{x^3} + \cos x - \sin x + \frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

№12. $y = 4e^x + \operatorname{arctg} x + \arcsin x \Rightarrow y' = 4e^x + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

№13. $y = x\arccos x \Rightarrow y' = x'\cdot\arccos x + x(\arccos x)' = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

№14. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x} \Rightarrow y' = \frac{(1+e^x)'(1-e^x) - (1+e^x)(1-e^x)'}{(1-e^x)^2} =$

$$= \frac{e^x(1-e^x) + (1+e^x)e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}, \quad x \neq 0.$$

№15. $y = \cos^{100} x \Rightarrow y' = 100\cos^{99} x \cdot (\cos x)' = -100 \sin x \cos^{99} x$.

№16. $y = \ln(\operatorname{tg} 5x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 5x}(\operatorname{tg} 5x)' = \operatorname{ctg} 5x \cdot \dfrac{5}{\cos^2 5x}$, где $\operatorname{tg} 5x > 0$, т.е. $5x \in \left(\pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow x \in \left(\dfrac{\pi n}{5}, \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}\right)$.

№17. $y = e^{\operatorname{tg} x} \Rightarrow y' = e^{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

№18. $y = 3x^3 \ln x - x^3 \Rightarrow y' = 3\left(3x^2 \ln x + x^3 \cdot \dfrac{1}{x}\right) - 3x^2 = 9x^2 \ln x$, где $x > 0$.

№19. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \Rightarrow y' = \dfrac{(x^2+1)'(x^2-1) - (x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$

$$= \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2},\ x \neq \pm 1.$$

№20. Иногда перед тем, как продифференцировать функцию, имеет смысл её упростить.

а) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. В данном случае, выделяя тригонометрическую единицу и используя формулы $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и понижения степени $\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, получим: $y = \sin^4 x + \cos^4 x =$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Теперь найти производную не составляет труда: $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right)' = -\sin 4x$.

б) $y = \lg(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)$. Воспользуемся основным гиперболическим тождеством: $y = \lg 1$, поэтому $y' = 0$.

в) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x \Rightarrow y' = \operatorname{ch} x$.

№21. Решение: а) $(\ln(\ln(\ln x)))' = \dfrac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x}$ $(x > e)$;

б) $(\sin^5 x)' = 5 \sin^4 x \cdot \cos x$;

в) $(\operatorname{ctg}(7x^2 - 6x + 1))' = -\dfrac{1}{\sin^2(7x^2 - 6x + 1)} \cdot (14x - 6)$;

г) $(5^{\cos 13x})' = 5^{\cos 13x} \cdot \ln 5 \cdot (-\sin 13x) \cdot 13$.

№22. Найдём производные сложных функций:

а) $y = \log_7(\cos^5 x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{(\cos^5 x)\ln 7} \cdot 5\cos^4 x \cdot (-\sin x)$, $\cos x > 0$;

б) $y = \arcsin(\sin^2 x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}} \cdot 2\sin x \cdot \cos x$, $\sin x \neq \pm 1$;

в) $y = \operatorname{arctg}(2^x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+(2^x)^2} \cdot 2^x \cdot \ln 2$.

№23. $y = \ln(\operatorname{tg} 2x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2$, $\operatorname{tg} 2x > 0$.

№24. $y = 3^{\arccos 2x} \Rightarrow y' = 3^{\arccos 2x} \cdot \ln 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right) \cdot 2$, где $2x \in [-1, 1]$.

№25. а) $y = x^x$ $(x > 0)$. Воспользуемся приёмом «предварительное логарифмирование». Прологарифмируем по основанию e равенство $y = x^x$: $\ln y = x \ln x$. Теперь продифференцируем по переменной x полученное равенство, учитывая, что левую часть дифференцируем по правилу производной сложной функции, а правую – как производную произведения двух функций: $\frac{y'}{y} = (x)' \ln x + x \cdot (\ln x)'$. Упрощая и выражая из этого равенства y, находим искомую производную: $y' = x^x(\ln x + 1)$ $(x > 0)$.

б) $y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$. Прологарифмируем равенство: $\ln y = \ln(x^{\sin x}) \Leftrightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x$. Теперь продифференцируем по x: $\dfrac{y'}{y} = (\sin x)' \ln x + \sin x (\ln x)' \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = \cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}$. Умножим на y: $y' = y\left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$.

в) $y = (1+x^2)^{\cos x}$. Прологарифмируем равенство: $\ln y = \ln((1+x^2)^{\cos x}) \Leftrightarrow \ln y = \cos x \ln(1+x^2)$. Продифференцируем: $\dfrac{y'}{y} = -\sin x \ln(1+x^2) + \cos x \cdot \dfrac{1}{1+x^2} \cdot 2x$. Умножим на y:

$$y' = y\left(-\sin x \ln(1+x^2) + \frac{2x\cos x}{1+x^2}\right) =$$
$$= (1+x^2)^{\cos x}\left(-\sin x \ln(1+x^2) + \frac{2x\cos x}{1+x^2}\right).$$

№26. $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$. Прологарифмируем равенство: $\ln y = \ln(x^{\frac{1}{x}})$. Продифференцируем: $\dfrac{y'}{y} = \left(\dfrac{1}{x}\ln x\right)' \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = \left(\dfrac{1}{x}\right)' \ln x + \dfrac{1}{x} \cdot (\ln x)' \Leftrightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{x^2}\ln x + \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow$. Умножим на y: $y' = y \cdot \dfrac{1-\ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

№27. Продифференцируем обе части этого уравнения по переменной x, учитывая, что y зависит от x, и затем выразим из полученного равенства искомую производную:

$$y^2 + 2xyy' - 5 + \frac{y'}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{5-y^2}{2xy + \frac{1}{y}}.$$

Заметим, чтобы вычислить производную неявно заданной функции, надо, вообще говоря, знать не только значение x, но и соответствующее значение y.

№28. Найдём $y'(x)$ и $y''(x)$, а также dy и d^2y для функций, заданных неявно уравнениями: а) $y + \ln y + x^2 = 0$; б) $2y + \cos y + 2x = 0$.

а) При $y > 0$ продифференцируем уравнение $y + \ln y + x^2 = 0$: $y' + \frac{y'}{y} + 2x = 0$, откуда находим первую производную: $y' = \dfrac{-2xy}{y+1}$. Чтобы найти вторую производную, продифференцируем ещё раз полученное равенство по правилу дифференцирования частного:

$$y'' = -2\frac{(xy)'(y+1) - xy(y+1)'}{(y+1)^2} = -2\frac{(y+xy')(y+1) - xyy'}{(y+1)^2}.$$

Это выражение можно упростить, подставив вместо y' её выражение (сделайте это самостоятельно). Заметим, что производная неявно заданной функции зависит не только от x, но и, вообще говоря, от y (и y', но от последней можно избавиться).

Тогда для дифференциалов получим выражения: $dy(x) = y'(x)dx = \dfrac{-2xydx}{y+1}$, $d^2y(x) = y''(x)(dx)^2 = ...$

б) Чтобы найти производную первого порядка, продифференцируем равенство 1 раз: $2y' - \sin y \cdot y' + 2 = 0$, откуда находим $y'(2 - \sin y) = -2$ $\Rightarrow y' = \frac{2}{\sin y - 2}$. Для нахождения производной второго порядка продифференцируем равенство $2y' - \sin y \cdot y' + 2 = 0$ ещё раз: $2y'' - (\sin y \cdot y')' = 0$ $\Rightarrow 2y'' - (\cos y \cdot y'^2 + \sin y \cdot y'') = 0$, откуда находим $y'' = \dfrac{\cos y \cdot (y')^2}{2 - \sin y}$. Для нахождения дифференциалов первого и второго порядков осталось воспользоваться формулами $dy(x) = y'(x)dx$, $d^2y(x) = y''(x)dx^2$.

№29. Найдём производную функции $y(x)$, заданной неявно при помощи уравнения $x\cos y - y\sin x = 0$. Для этого продифференцируем это уравнение один раз (по переменной x), учитывая, что y зависит от x. Получим: $x' \cdot \cos y + x(-(\sin y) \cdot y') - (y' \sin x + y \cos x) = 0$, откуда уже находим производную: $y' = \dfrac{\cos y - y \cos x}{x \sin y + \sin x}$.

№30. Используя формулу дифференцирования параметрически заданных функций, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(\operatorname{arctg} t)'}{(t^3+2t)'} = \frac{1/(1+t^2)}{3t^2+2} = \frac{1}{(1+t^2)(3t^2+2)}.$$

Заметим, что найденная производная зависит от параметра t. Чтобы найти, например, $y'(x)$ в точке $t = 0$ (что соответствует $x(0) = 0$), подставим в полученное выражение для производной $t = 0$: $y'_x\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{2}$.

№31. Найдём производную $y'(x)$ функции, заданной параметрически системой уравнений: $\begin{cases} x(t) = 2t+1, \\ y(t) = t^3,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$ Согласно формуле, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(t^3)'}{(2t+1)'} = \frac{3t^2}{2},\ t \in \mathbb{R}.$$

№32. Найдём производную функции, заданной параметрически системой $\begin{cases} x(t) = e^{2t}, \\ y(t) = e^{3t}. \end{cases}$ Имеем $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{(e^{3t})'}{(e^{2t})'} = \dfrac{3e^{3t}}{2e^{2t}} = \dfrac{3}{2}e^t,\ t \in \mathbb{R}$.

№33. Найдём производную y'_x функции $y = y(x)$ в точке $t = 1$, если функция задана параметрически системой уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = 2t-1; \\ y(t) = 3t^3+5,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Согласно формуле, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(3t^3+5)'}{(2t-1)'} = \frac{9t^2}{2}\Big|_{t=1} = \frac{9}{2}.$$

№34. По формуле для 1-го дифференциала имеем: $dy(x) = y'(x)dx = (\arcsin x^2)'dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)'dx = \dfrac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$, $|x| < 1$.

№35. По формуле для 1-го дифференциала имеем: $dy(x) = y'(x)dx = (\sin^3 2x)'dx = 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2dx = 3 \sin 4x \sin 2x dx$.

№36. Имеем: $dy(x) = y'(x)dx = (2^{-x^2})'dx = 2^{-x^2}\ln 2 \cdot (-x^2)'dx = -2\ln 2 \cdot x \cdot 2^{-x^2}dx$.

№37. а) $y' = 5\cos 5x \;\Rightarrow\; y'' = -25\sin 5x \;\Rightarrow\; d^2y = -25\sin 5x dx^2$;
б) $y' = -3^{-x}\ln 3 + 12x^5 \;\Rightarrow\; y'' = 3^{-x}\ln^2 3 + 60x^4 \;\Rightarrow\; d^2y = (3^{-x}\ln^2 3 + 60x^4)dx^2$.

№38. $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 8x + 5 \Rightarrow y'' = 6x - 8 \Rightarrow d^2y = y''(dx)^2 = (6x-8)dx^2$.

№39. $y = x^2\ln x \Rightarrow y' = (x^2)'\ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x\ln x + x \Rightarrow y'' = 2\left(\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) + 1 = 2\ln x + 3 \Rightarrow d^2y = y''(dx)^2 = (2\ln x + 3)dx^2$, $x > 0$.

№40. $y = x\sin x \Rightarrow y' = x'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x \Rightarrow y'' = \cos x + (\cos x - x\sin x) = 2\cos x - x\sin x$. Тогда $d^2y = y''(dx)^2 = (2\cos x - x\sin x)dx^2$.

№41. $y = e^x\cos x \Rightarrow y' = (e^x)'\cos x + e^x(\cos x)' = e^x\cos x - e^x\sin x = e^x(\cos x - \sin x) \Rightarrow y'' = (e^x)'(\cos x - \sin x) + e^x(\cos x - \sin x)' = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x\sin x \Rightarrow y''' = -2(e^x\sin x + e^x\cos x) = -2e^x(\sin x + \cos x)$.

№42. а) $dy = f'(x)dx = (e^{4x})'dx = 4e^{4x}dx$; $d^2y = (e^{4x})''(dx)^2 = 4^2e^{4x}dx^2$;
$d^ny = (e^{4x})^{(n)}(dx)^n = 4^ne^{4x}dx^n$;
б) $d(2^x) = (2^x)'dx = 2^x\ln 2dx$; $d^2(2^x) = (2^x)''(dx)^2 = 2^x(\ln^2 2)dx^2$; $d^n(2^x) = (2^x)^{(n)}(dx)^n = 2^x \cdot \ln^n 2\, dx^n$.

№43. Найдём $y^{(n)}(x)$, если а) $y = \sin 5x$; б) $y = e^{3x}$.
а) Известно, что $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $y^{(n)}(x) = 5^n\sin\left(5x + \frac{\pi n}{2}\right)$.
б) $y = e^{3x} \Rightarrow y' = 3e^{3x} \Rightarrow y'' = 3^2e^{3x} \Rightarrow y^{(3)} = 3^3e^{3x} \Rightarrow ...\ y^{(n)} = 3^ne^{3x}$.

№44. Эта задача проще решается с помощью формулы Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

Положим в этой формуле $n = 100$, $u = e^x$, $v = x^2$, тогда $v^{(0)} = x^2$, $v' = 2x$, $v'' = 2$, $v^{(3)} = v^{(4)} = v^{(5)} = ...v^{(100)} = 0$, $u' = u'' = u''' = ... =$

$u^{(100)} = e^x$. Имеем

$$(x^2e^x)^{(100)} = C_{100}^0(e^x)^{(100)}(x^2)^{(0)} + C_{100}^1(e^x)^{(99)}(x^2)' + C_{100}^2(e^x)^{(98)}(x^2)''.$$

По формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ находим: $C_{100}^0 = 1$, $C_{100}^1 = 100$, $C_{100}^2 = 4950$ и

$$(x^2e^x)^{(100)} = e^x \cdot x^2 + 100e^x \cdot 2x + 4950e^x \cdot 2 = e^x(x^2 + 200x + 9900).$$

Тогда для дифференциала получаем выражение:

$$d^{100}y(x) = y^{(100)}(x)dx^{100} = e^x(x^2 + 200x + 9900)dx^{100}.$$

При $x = 0$, в частности, получим $d^{100}y(0) = 9900dx^{100}$.

№45. Используя формулы Лейбница для вычисления производных и дифференциалов высших порядков, найдём $y^{(20)}(x)$ и $d^{20}y(x)$, если $y = x^2e^{2x}$.

Положим $u = x^2$, $v = e^{2x}$, тогда $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = ... = u^{(20)} = 0$, $v' = 2e^{2x}$, $v'' = 2^2e^{2x}$,..., $v^{(20)} = 2^{20}e^{2x}$. Вычислив коэффициенты $C_{20}^0 = 1$, $C_{20}^1 = 20$, $C_{20}^2 = \frac{20!}{2!18!} = 190$, подставим в формулу Лейбница[1]:

$$(x^2e^{2x})^{(20)} = C_{20}^0u^{(0)}v^{(20)} + C_{20}^1u'v^{(19)} + C_{20}^2u''v^{(18)} =$$

$$= x^2 \cdot 2^{20} \cdot e^{2x} + 20 \cdot 2x \cdot 2^{19} \cdot e^{2x} + 190 \cdot 2 \cdot 2^{18} \cdot e^{2x} = 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95).$$

Тогда, умножая обе части полученного равенства на dx^{20}, получим выражение для дифференциала соответствующего порядка (x – независимая переменная): $d^{20}y(x) = 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95)dx^{20}$.

№46. Найдём производную n-го порядка функции $y = xe^x$ по формуле Лейбница:

$$(xe^x)^{(n)} = C_n^0x^{(0)}(e^x)^{(n)} + C_n^1x'(e^x)^{(n-1)}.$$

Так как $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $(e^x)^{(n)} = e^x$, $x^{(0)} = x$, то окончательно получаем: $(xe^x)^{(n)} = xe^x + ne^x = e^x(x + n)$.

№47. Поскольку $y(0) = \ln 1 = 0$, $y'(x) = \left.\dfrac{1}{1+x}\right|_{x=0} = 1$, то уравнение *касательной* к кривой $y = \ln(1 + x)$ в точке $x_0 = 0$ имеет вид:

$$y = y(0) + y'(0)(x - 0), \text{ т.е. } y = x,$$

а уравнение *нормали*: $y = y(0) - \frac{1}{y'(0)}(x - 0) = -x$.

[1] Формула Лейбница особенно эффективна, когда одна из функций имеет только конечное число ненулевых производных (например, является многочленом).

№48. Напишем уравнения касательной и нормали к кривой $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ в точке $t = 0$. Найдём $x_0 = x(0) = 0$, $y_0 = y(0) = 0$, тогда $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3-3t^2}{2-2t} \Rightarrow y'_x\Big|_{t=0} = \dfrac{3}{2}$.

Уравнение касательной: $y = 0 + \dfrac{3}{2}(x-0) = \dfrac{3}{2}x$, т.е. $3x - 2y = 0$.

Уравнение нормали: $y = 0 - \dfrac{2}{3}(x-0) = -\dfrac{2}{3}x$, т.е. $2x + 3y = 0$.

№49. Составим уравнения касательной и нормали в точке x_0, отвечающей значению параметра $t_0 = \frac{\pi}{2}$, если кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ Для этого нам понадобится производная $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$, а также $y_0 = y(t_0) = 1 - \cos t_0 = 1$, $x_0 = x(t_0) = t_0 - \sin t_0 = \frac{\pi}{2} - 1$.

Уравнение касательной: $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) = 1 + 1\cdot(x - (\frac{\pi}{2} - 1)) = 1 + x - \frac{\pi}{2} + 1 = x - \frac{\pi}{2} + 2$.

Уравнение нормали: $y = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) = 1 - 1\cdot(x - (\frac{\pi}{2} - 1)) = 1 - x + \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - x$.

№50. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой, заданной неявно уравнением $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$, в точке $M_0(1, -1)$.

Указание: найти производную $y'(x)$ в точке $M_0(1,-1)$ по правилу дифференцирования неявно заданных функций (для этого следует продифференцировать один раз уравнение по переменной x и выразить из полученного равенства y' через x и y) и затем воспользоваться уравнениями касательной и нормали.

№51. При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, поэтому имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Раскроем эту неопределённость:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

№52. Приведём предел к виду $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^3 x}{\frac{1}{x}}$ и трижды (пока сохраняется неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$) воспользуемся 2-м правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^3 x}{\frac{1}{x}} \overset{[\text{Л}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -3\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{[\text{Л}]}{=} -3\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 6\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{[\text{л}]}{=} 6\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -6\lim_{x\to 0} x = 0.$$

№53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x}{1+x^2} = 1.$

№54. Раскроем неопределённость $\frac{0}{0}$, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1.$$

№55. Раскроем неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

№56. Вычислим предел, сведя к неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ и используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1/x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to +0} x = 0.$$

№57. Используя правило Лопиталя, вычислим пределы:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{e^x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2}{e^x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x}{e^x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6}{e^x} = 0;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3} \overset{[\text{л}]}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{[\text{л}]}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{6x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x}{6} = -\dfrac{1}{6}.$

№58. Для доказательства применим правило Лопиталя: а) n раз, б) один раз:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \overset{[\text{л}]}{=} \ldots \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{n!}{e^x} = 0;$$

$$\text{б)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^n} \overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{nx^n} = 0.$$

№59. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{x\sin x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \overset{[\text{л}]}{=}$

$$\overset{[\text{л}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0.$$

№60. Используя основное логарифмическое тождество $a = e^{\ln a}$, преобразуем функцию: $(\sin x)^x = e^{\ln((\sin x)^x)} = e^{x\ln(\sin x)} = e^{\frac{\ln(\sin x)}{1/x}}$ и затем воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\sin x)}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{1/x}} \overset{[\text{л}]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-1/(x^2)}}.$$

Учтем, что при $x \to 0$ справедливы соотношения эквивалентности $\sin x \sim x$, $\cos x \sim 1$, тогда получим

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-1/(x^2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-x)} = e^0 = 1.$$

№61. Для вычисления пределов вида $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, где при $x \to a$ $f(x) \to 1$ и $g(x) \to \infty$ (имеется неопределённость вида 1^∞) используется следующий приём: предел сводится при помощи 2-го замечательного предела к эквивалентному, но более простому пределу вида

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}.$$

Воспользуемся этим приёмом ($f(x) = 1 + x$, $g(x) = \ln x$):

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \overset{[\text{Л}]}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0} x} = e^0 = 1.$$

№62. а) Пусть x – произвольное число из малой окрестности точки 0. Воспользуемся формулой Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

Для $f(x) = e^x$ найдём $f(0) = e^0 = 1$, $f'(0) = e^x\big|_{x=0} = 1$, $f''(0) = e^x\big|_{x=0} = 1$, $f'''(0) = e^x\big|_{x=0} = 1$, поэтому окончательно получим

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

б) Для $f(x) = \sin x$ найдём $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos x\big|_{x=0} = 1$, $f''(0) = -\sin x\big|_{x=0} = 0$, $f'''(0) = -\cos x\big|_{x=0} = -1$, поэтому

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

№63. По формуле Тейлора для функции $f(x) = \sin x$ в окрестности точки $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ имеем:

$$\sin x = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 +$$

$+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right)$. Так как $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(x)=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}$, $f''(x)=-\sin x\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'''(x)=-\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}$, то получаем разложение

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2-\frac{1}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

№64. Используя формулу Маклорена (в окрестности точки $x=0$), найдём разложение функции $f(x)=e^{2x-x^2}$ до члена с x^3 включительно. Так как x близко к нулю, то и $2x-x^2$ также близко к нулю, а значит, можно воспользоваться стандартным разложением экспоненциальной функции $e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+o(t^3)$, подставив вместо t выражение $2x-x^2$. Раскрывая скобки и записывая все члены порядка выше 3 как $o(x^3)$, получим:

$$e^{2x-x^2}=1+(2x-x^2)+\frac{(2x-x^2)^2}{2!}+\frac{(2x-x^2)^3}{3!}+o((2x-x^2)^3)=$$

$$=1+2x-x^2+\frac{1}{2}(4x^2-4x^3+x^4)++\frac{1}{6}((2x)^3-3(2x)^2x^2+3(2x)(x^2)^2)+o(x^3)=$$

$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^3).$$

Здесь при упрощении использовалось, что $o((2x-x^2)^3)=o(x^3)$. Докажем это:

$$\lim_{x\to0}\frac{o((2x-x^2)^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{o((2x-x^2)^3)}{(2x-x^2)^3}\cdot\frac{(2x-x^2)^3}{x^3}\right)=0.$$

№64. а) Воспользуемся разложением $e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+o(t^2)$ при $t\to0$, тогда имеем:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2),\quad e^{-x}=1-x+\frac{(-x)^2}{2!}+o(x^2).$$

Подставим под знак предела и учтем, что $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2))+(1-x+\frac{(-x)^2}{2!}+o(x^2))-2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}=1+0=1.$$

б) *Указание*: воспользуйтесь разложением $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + o(t^2)$ при $t \to 0$.

№66. а) Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на отрезке $[x, y]$ и дифференцируема внутри него, поэтому, применив теорему Лагранжа на $[x, y]$, получим, что найдётся точка $\xi \in (x, y)$: $\sin x - \sin y = (x - y) \cos \xi$, откуда

$$|\sin x - \sin y| = |x - y| |\cos \xi| \leq |x - y|.$$

б) Функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ непрерывна на отрезке $[x, y]$ и дифференцируема внутри него, поэтому, применив теорему Лагранжа на $[x, y]$, получим, что найдётся точка $\xi \in (x, y)$: $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = (x - y)\frac{1}{1+\xi^2}$, откуда

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| = |x - y| |\tfrac{1}{1+\xi^2}| \leq |x - y|.$$

№67. Противоречия с теоремой Ролля нет, так как не выполнено одно из требований этой теоремы: функция $f(x)$ не имеет производной при $x = 0$. Действительно,

$$f'_-(0) = \lim_{\triangle x \to -0} \frac{-\sqrt[3]{(\triangle x)^2}}{\triangle x} = +\infty \neq f'_+(0) = \lim_{\triangle x \to +0} \frac{-\sqrt[3]{(\triangle x)^2}}{\triangle x} = -\infty.$$

№68. а) Пусть нам известна производная синуса, а мы хотим найти производную арксинуса. Тогда обозначим $y(x) = \arcsin x$ ($|x| < 1$). Найдём обратную функцию $x(y)$, выразив из этого равенства переменную x через переменную y (для этого достаточно применить к равенству $y = \arcsin x$ функцию синус и воспользоваться тождеством $\sin(\arcsin x) = x$). Получим: $x = \sin y$. Тогда $\dfrac{dx}{dy} = \cos y$. По теореме о производной обратной функции,

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Так как $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, то $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$.

б) Пусть теперь нам известна производная тангенса, а мы хотим найти производную арктангенса. Обозначим $y(x) = \operatorname{arctg} x$ ($x \in \mathbb{R}$). Найдём обратную функцию $x(y)$: для этого достаточно применить к равенству $y = \operatorname{arctg} x$ функцию тангенс и воспользоваться тождеством $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$. Получим: $x = \operatorname{tg} y$. Тогда $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$. По теореме о производной обратной функции,

$$\frac{d(\operatorname{arctg} x)}{dx} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x).$$

Так как $\cos(\operatorname{arctg} \alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, то $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

6 СЕМИНАР: Исследование функций при помощи производной. Построение графиков

Раздел: Математический анализ функций одной действительной переменной. Дифференциальное исчисление.

Схема исследования функций и построения графиков: нахождение области определения и множества значений функции, точек пересечения графика с осями координат, определение промежутков знакопостоянства, исследование на чётность/нечётность (наличие осей и центров симметрии), периодичность, непрерывность и дифференцируемость, монотонность, наличие локальных и краевых экстремумов, асимптот, определение участков различной выпуклости и точек перегиба и проч.

Практика: разбор схемы исследования функций. Решение задач на исследование функций в прямоугольной и (на простейших примерах) полярной системах координат и построение графиков.

Литература:

[4]: Гл. 8 (Приложение производной), §8.3 (Интервалы монотонности и экстремумы функции), §8.4 (Интервалы выпуклости, точки перегиба), §8.5 (Асимптоты. Исследование функций и построение их графиков).

[5] Гл. 4 (Функция), §7 (Исследование функции и построение графиков)

Общая схема исследования функции и построения графика.

Для построения графика функции $y = f(x)$ необходимо выполнить её исследование, придерживаясь следующей схемы (порядок пунктов можно менять).

1) Найти область определения D_f функции.

2) Найти область значений E_f функции. Указать, является ли функция ограниченной (снизу, сверху, с двух сторон). Найти её точные грани (а если они достигаются, то наименьшее и наибольшее значения).

3) Найти точки пересечения графика функции с осями координат, т.е. вычислить $f(0)$ и нули функции (те значения переменной x, в которых $f(x) = 0$).

4) Найти промежутки знакопостоянства функции (где функция принимает положительные значения, а где – отрицательные значения).

5) Определить, является ли функция $f(x)$ чётной, нечётной или функцией общего вида (т.е. ни чётной, ни нечётной). Есть ли у неё другие оси и центры симметрии.

6) Определить, является ли функция периодической. Если да, то найти её (главный – наименьший положительный) период.

7) Найти промежутки непрерывности данной функции и точки разрыва её графика (если они имеются). В каждой точке разрыва указать левый и правый односторонние пределы функции и её значение в самой точке разрыва (если они определены). Найти вертикальные асимптоты к графику $f(x)$ (если они имеются). Охарактеризовать точки разрыва.

8) Указать области, где функция $f(x)$ дифференцируема, вычислить первую производную $f'(x)$. Отметить точки, где производная не существует, но есть односторонние производные. Вычислить в каждой из таких точек правую и левую производные. Это поможет более точно изобразить график $f(x)$ в окрестности указанных точек.

9) Указать (по знаку производной) интервалы монотонности функции.

10) Исследовать функцию на локальные экстремумы.

Для нахождения экстремумов надо найти критические точки 1-го рода (в которых $f'(x) = 0$ либо $f'(x)$ не существует), и проверить, имеется ли в них локальный экстремум, или нет. Если экстремум есть, то охарактеризовать его (строгий или нет, максимум или минимум, каково значение функции f в этой точке). Воспользоваться для этого достаточными условиями существования локального экстремума или его определением.

11) Исследовать поведение функции при $x \to \pm\infty$ (если это возможно), в общем случае – в граничных точках области определения. Найти наклонные аси́мптоты к графику функции.

Чтобы найти наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, следует записать её уравнение $y = kx + b$, а затем найти коэффициенты по формулам:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Асимптота существует, если оба предела существуют и конечны. Аналогично ищется асимптота при $x \to -\infty$.

12) Исследовать функцию на выпуклость.

Для этого следует вычислить вторую производную функции $f''(x)$, отметив критические точки 2-го рода, в которых $f''(x)$ равна нулю или не существует. По знаку второй производной $f''(x)$ определяются интервалы, на которых функция $f(x)$ выпукла вверх или, соответственно, вниз.

13) Исследовать график данной функции на наличие точек перегиба. Точки перегиба возможны там, где $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует (критические точки 2-го рода). В точке перегиба график функции должен иметь касательную. Воспользоваться достаточным условием точки перегиба или её определением.

Завершить исследование построением эскиза графика функции.

Данная схема исследования, в основном, соблюдается и при построении графиков кривых, заданных параметрически и неявно, а также в полярных координатах.

Пример. Исследовать функцию $y = \sin x$ и построить её график.

1) *Область определения*: $D(\sin x) = (-\infty, +\infty)$, т.е. областью определения этой функции является всё множество действительных чисел.

2) *Область значений, ограниченность, наибольшее (наименьшее) значения, точные грани функции.* Область значений: $E(\sin x) = [-1, 1]$. Ограниченность области значений функции означает, что сама функция ограничена и сверху, и снизу. График данной функции располагается в полосе, ограниченной двумя горизонтальными прямыми $y = -1$ и $y = 1$. Точная верхняя грань ($\sup \sin x$) достигается в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и равна 1 (совпадает с наибольшим значением функции). Точная нижняя грань ($\inf \sin x$) достигается в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и равна -1 (совпадает с наименьшим значением функции).

3) *Пересечение графика функции с осями координат.* График функции пересекает ось Ox в точках $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Вторую координатную ось Oy график пересекает в единственной точке с ординатой $y = \sin 0 = 0$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*:

$$\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n),$$

$$\sin x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n).$$

5) *Чётность (нечётность).* Функция $y = \sin x$ является нечётной ($\sin(-x) = -\sin x$ при всех $x \in \mathbb{R}$). График функции *центрально симметричен* относительно точки начала координат. Более того, этот график имеет бесконечно много центров симметрии, координаты которых $(\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

6) *Периодичность.* Функция является периодической, причём наименьший положительный период функции равен 2π.

7) *Непрерывность.* Функция $y = \sin x$ является непрерывной на всей области определения.

8) *Дифференцируемость.* Функция $y = \sin x$ дифференцируема на всей области определения, причём $(\sin x)' = \cos x$.

9) *Монотонность.* Функция $y = \sin x$ не является монотонной на всей области определения, однако она является монотонной на отдельных промежутках, а именно: функция возрастает там, где $(\sin x)' = \cos x > 0$, и убывает на промежутках, где $(\sin x)' = \cos x < 0$. Решая эти неравенства, находим промежутки монотонности:

$$\text{возрастает на интервалах} \quad (-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n),$$

$$\text{убывает на интервалах} \quad (\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n), \ n \in \mathbb{Z}.$$

10) *Локальные экстремумы.* Приравняв производную к нулю, найдём критические точки 1-го рода: $\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. При этом в точках $x = \pi/2 + 2\pi n$ производная меняет знак с $+$ на $-$, а в точках $x = -\pi/2 + 2\pi n$, наоборот, с $-$ на $+$. Это означает, что функция $y = \sin x$ имеет бесконечно много локальных максимумов, равных единице, в точках $x = \pi/2 + 2\pi n$, и бесконечно много локальных минимумов, равных минус единице, в точках $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

11) *Асимптот* график функции не имеет (вертикальных и наклонных – из-за ограниченности функции, а горизонтальных – поскольку не существует $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$).

12) *Выпуклость и точки перегиба графика функции.* Найдём $(\sin x)'' = -\sin x$. Функция выпукла вверх там, где её вторая производная отрицательна, и выпукла вниз, где её вторая производная положительна. Решая неравенства, находим: функция выпукла вниз на интервалах $(-\pi + 2\pi n, 2\pi n)$ и выпукла вверх при $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

График функции имеет точки перегиба с координатами $(\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (в этих точках вторая производная обращается в нуль и при переходе через эти точки меняет свой знак).

Опираясь на исследованные выше свойства функции, получаем следующий график, называемый *синусоидой* (см. ниже).

Рис. 1: График функции $y = \sin x$

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 6.

Как выполнять домашнее задание. *Вы читаете условие задачи и пробуете её решить. Если вы испытываете сложности, то тогда вы можете заглянуть в решение и разобрать его. Никогда не пытайтесь сразу смотреть в решение, если хотите получить положительный результат! Если остались вопросы, спросите у вашего преподавателя. Перед решением задач рекомендуется прочитать конспект лекции по соответствующему разделу.*

6.1 Задачи на свойства функций

№1. а) Найдите интервалы монотонности и экстремумы функции

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2.$$

б) Для той же функции проведите её полное исследование и постройте эскиз графика.

№2. Найдите интервалы монотонности и экстремумы функции

$$y = \frac{x}{\ln x}.$$

№3. Найдите наибольшее значение на отрезке $[0, \frac{\pi}{4}]$ функции

$$f(x) = 2\sin 2x + 3\cos 2x.$$

№4. Найдите интервалы выпуклости вверх и вниз, а также точки перегиба графика функции

$$y = \frac{1}{6}x^3(x^2 - 5), \quad x \in \mathbb{R}.$$

№5. Найдите асимптоты графика функции $y = \dfrac{2 + xe^x}{3 + e^x}$.

6.2 Задачи на построение графиков функций

№6. Исследуйте функцию и постройте её график:

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

№7. Исследуйте функцию и постройте её график:

$$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

№8. Исследуйте функцию и постройте её график:

$$y = 12x - x^3.$$

№9. Исследуйте функцию и постройте её график:

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

№10. Исследуйте функцию и постройте её график:

$$y = (1 - x)e^x.$$

№11. Исследуйте функцию и постройте её график:

$$y = 2x + \frac{1}{x^2}.$$

№12. Исследуйте функцию и постройте её график:

$$y = x + \operatorname{arctg} x.$$

№13. Постройте эскиз графика функции, не вычисляя производных:

$$y = 3^{\frac{x+2}{x-1}}.$$

№14. В полярной системе координат постройте кривые:

а) $r = 1$, б) $r = \varphi$ (спираль Архимеда).

№15. Преобразуйте уравнение кривой из декартовых координат к полярным и изобразите кривую:

$$x^2 + y^2 = x.$$

Указание: положить $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Чтобы изобразить кривую, выделяя полный квадрат, приведите уравнение к стандартному виду уравнения окружности $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$.

Контроль знаний: проверка выполнения домашнего задания.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ:

I. Задачи на свойства функций.

№1. Приведём полное исследование функции по известной схеме.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty, +\infty)$, т.е. функция определена на всём множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

2) *Область значений* $E(y)$: ответим на этот вопрос позже.

3) *Пересечение графика функции с осями координат.* Найдём точки пересечения графика функции с осью Ox (нули функции): $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0$, т.е. $x = 0$ или $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$. Решая второе уравнение, находим ещё две точки: $x = \frac{-2\pm 2\sqrt{10}}{3}$. Вторую координатную ось Oy график пересекает в единственной точке с ординатой $y(0) = 0$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции* находим, решив методом интервалов неравенства:

$$y > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, \frac{-2-2\sqrt{10}}{3}\right) \bigcup \left(\frac{-2+2\sqrt{10}}{3}, +\infty\right).$$

$$y < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{-2-2\sqrt{10}}{3}, 0\right) \bigcup \left(0, \frac{-2+2\sqrt{10}}{3}\right).$$

5) *Чётность (нечётность).* Функция не является ни нечётной, ни нечётной.

6) *Периодичность.* Функция не является периодической.

7) *Непрерывность.* Функция является непрерывной на всей области определения.

8) *Дифференцируемость.* Функция дифференцируема на всей области определения, причём

$$y' = x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1).$$

9) *Монотонность.* Функция не является монотонной на всей области определения, однако она является монотонной на отдельных промежутках, а именно: функция возрастает там, где $y' > 0$, и убывает на промежутках, где $y' < 0$. Решая эти неравенства, находим промежутки монотонности:

$$y(x) \text{ возрастает на интервалах } \quad (-2, 0)\bigcup(1, +\infty),$$

$$y(x) \text{ убывает на интервалах } \quad (-\infty, -2)\bigcup(0, 1).$$

10) *Локальные экстремумы.* Приравняв производную к нулю, найдём критические точки 1-го рода: $x(x+2)(x-1)=0 \;\Leftrightarrow\; x=-2;0;1$. При этом в точке $x=0$ производная меняет знак с $+$ на $-$, а в точках $x=-2$ и $x=1$, наоборот, с $-$ на $+$. Это означает, что функция имеет локальный максимум, равный $f(0)=0$, в точке $x=0$, и локальные минимумы в точках $x=-2$ и $x=1$, равные, соответственно, $-\frac{8}{3}$ и $-\frac{5}{12}$.

11) *Асимптоты.* Поищем наклонную асимптоту при $x\to+\infty$ в виде $y=kx+b$. Здесь $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{3}x^2-x)=+\infty$. Так как предел оказался равен бесконечности (а не конечному числу), то это означает, что асимптота не существует. Аналогично не будет существовать асимптота при $x\to-\infty$.

12) *Выпуклость.* Найдём вторую производную: $y''=3x^2+2x-2$ и выясним, где она больше нуля (там функция будет выпукла вниз):

$$y''=3x^2+2x-2=3\left(x-\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)>0$$

т.е. на промежутках $x\in(-\infty,\frac{-1-\sqrt{7}}{3})\bigcup(\frac{-1+\sqrt{7}}{3},+\infty)$. Соответственно, функция выпукла вверх там, где её вторая производная отрицательна, т.е. при $x\in(\frac{-1-\sqrt{7}}{3},\frac{-1+\sqrt{7}}{3})$.

13) *Точки перегиба.* График функции имеет точки перегиба с координатами $(\frac{-1-\sqrt{7}}{3},f(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}))$, $(\frac{-1+\sqrt{7}}{3},f(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}))$ (в этих точках вторая производная обращается в нуль и при переходе через эти точки меняет свой знак).

Опираясь на исследованные выше свойства функции, строим график (сделайте это самостоятельно).

№2. Функция определена при $x>0$. Чтобы найти интервалы монотонности и экстремумы функции, вычислим её производную:

$$y=\frac{x}{\ln x}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}.$$

Функция возрастает, если $y'>0\Leftrightarrow\ln x>1$, т.е. при $x>e$. Соответственно, функция убывает, если $y'<0\Leftrightarrow\ln x<1$, т.е. при $0<x<e$. В точке $x=e$ знак производной меняется с $-$ на $+$, следовательно, $x=e$ – точка локального минимума, а сам минимум равен $y(e)=e$.

№3. Найдём наибольшее значение на отрезке $[0,\frac{\pi}{4}]$ функции $f(x)=2\sin 2x+3\cos 2x$. Решим задачу без использования производной, методом введения вспомогательного аргумента. Преобразуем функцию:

$$f(x) = 2\sin 2x + 3\cos 2x = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin 2x + \frac{3}{\sqrt{13}}\cos 2x\right) =$$

$$= \sqrt{13}\,(\cos\varphi \sin 2x + \sin\varphi \cos 2x) = \sqrt{13}\sin(2x+\varphi) \le \sqrt{13},$$

где $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$. Следовательно, наибольшее значение функции равно $\sqrt{13}$.

Докажем более сторого, что это значение достигается на указанном отрезке. В этом случае $\sin(2x+\varphi) = 1$. Решим это уравнение: $2x+\varphi = \frac{\pi}{2}+2\pi n$, т.е. $2x = \frac{\pi}{2}-\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}+2\pi n$. Учитывая, что $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{2}{\sqrt{13}} = \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$, получим $x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}+\pi n$. При $n=0$ имеем $x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$. Покажем, что $0 \le \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}} \le \frac{\pi}{4}$. Умножим на 2: $0 \le \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}} \le \frac{\pi}{2}$, но это верно, так как арксинус положительного числа всегда принимает значения из полуинтервала $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Итак, наибольшее значение функции равно $\sqrt{13}$ и достигается при $x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$.

№4. Найдём интервалы выпуклости вверх и вниз, а также точки перегиба функции

$$y = \frac{1}{6}x^3(x^2-5).$$

Для этого вычислим сначала первую, а затем вторую производную: $y' = \frac{1}{6}(x^5-5x^3)' = \frac{1}{6}(5x^4-15x^2)$, тогда $y'' = \frac{5}{3}(2x^3-3x) = \frac{5}{3}x(2x^2-3)$. Тогда функция выпукла вверх, если $y''<0$, т.е. при $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})\bigcup(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$, и выпукла вниз, если $y''>0$, т.е. при $x \in (-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)\bigcup(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$. Точки перегиба: $M_1(-\sqrt{\frac{3}{2}}, y(-\sqrt{\frac{3}{2}}))$, $M_2(0, y(0))$, $M_3(\sqrt{\frac{3}{2}}, y(\sqrt{\frac{3}{2}}))$.

№5. Найдём асúмптоты графика функции $y = \dfrac{2+xe^x}{3+e^x}$. Так как знаменатель строго положителен, то функция определена при всех действительных значениях x и вертикальных асимптот нет. Найдём наклонные асимптоты.

Пусть $x \to +\infty$, тогда ищем уравнение асимптоты в виде $y = k_1x+b_1$, где $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}+e^x}{3+e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(\frac{2}{xe^x}+1)}{e^x(\frac{3}{e^x}+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{xe^x}+1}{\frac{3}{e^x}+1} = 1$. Тогда $b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2+xe^x}{3+e^x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-3x}{3+e^x}=0$, так как показательная функция растёт на бесконечности быстрее степенно́й функции. Итак, мы нашли наклонную асимптоту $y=x$.

Пусть $x\to-\infty$, тогда ищем уравнение асимптоты в виде $y=k_2x+b_2$, где $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{2}{x}+e^x}{3+e^x}=0$, а $b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2+xe^x}{3+e^x}\right)=\dfrac{2}{3}$. Нашли горизонтальную асимптоту $y\equiv\dfrac{2}{3}$.

№ 6. Исследуем функцию $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ и построим её график.

1) *Область определения*: $D(y)=(-\infty,+\infty)$.

2) *Область значений*: позже.

3) *Пересечение графика функции с осями координат.* Чтобы найти точки пересечения графика с осью Ox, решим уравнение $y=0$ и получим точку $x=0$. Чтобы найти точку пересечения с осью Oy, положим $x=0$ и получим $y=0$, т.е. график пересекает обе координатные оси в точке $(0,0)$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*:

$$y>0 \text{ при } x>0,\quad y<0 \text{ при } x<0.$$

5) *Чётность (нечётность).* Так как при всех действительных x $y(-x)=\dfrac{2(-x)}{1+(-x)^2}=-\dfrac{2x}{1+x^2}=-y(x)$, то функция является нечётной. Поэтому график функции *центрально симметричен* относительно точки начала координат.

6) *Периодичность.* Функция не является периодической.

7) *Непрерывность.* Функция является непрерывной на всей области определения.

8) *Дифференцируемость.* Функция дифференцируема на всей области определения, причём $y'=\dfrac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.

9) *Монотонность.* Выясним, где функция возрастает, для этого решим неравенство $y'>0$:

$$\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}>0 \;\Leftrightarrow\; -1<y<1;$$

Найдём, где функция убывает ($y' < 0$):

$$\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} < 0 \;\Leftrightarrow\; y \in (-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty).$$

10) *Локальные экстремумы.* Приравняв производную к нулю, найдём критические точки 1-го рода (точки возможного экстремума): $\dfrac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1, 1$. При этом в точках $x = 1$ производная меняет знак с $+$ на $-$, а в точке $x = -1$, наоборот, с $-$ на $+$. Это означает, что функция имеет локальный максимум, равный единице, в точке $x = 1$, и локальный минимум, равный минус единице, в точке $x = -1$.

11) Найдём *асимптоты* графика функции. Вертикальных асимптот нет. Будем искать наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ в виде $y = k_1 x + b_1$, где $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{1+x^2} = 0$, тогда $b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{1+x^2} - 0\right) = 0$. То есть имеется горизонтальная асимптота $y \equiv 0$. Такая же асимптота имеется и при $x \to -\infty$.

12) *Выпуклость.* Найдём $y'' = \dfrac{4x(x^2+1)(x^2-3)}{(1+x^2)^4}$. Функция выпукла вверх там, где $y'' < 0$, т.е. при $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \bigcup (0, \sqrt{3})$. Функция выпукла вниз, где $y'' > 0$, т.е. при $x \in (-\sqrt{3}, 0) \bigcup (\sqrt{3}, +\infty)$.

13) *Точки перегиба.* График функции имеет точки перегиба $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (в этих точках график меняет своё направление выпуклости).

14) *Область значений функции*: $E(y) = [-1, 1]$. Наибольшее значение функции достигается в точке $x = 1$ и равно 1. В силу нечётности наименьшее значение функции достигается в точке $x = -1$ и равно (-1). Следовательно, функция ограничена как сверху, так и снизу. Её точные грани совпадают с наименьшим и наибольшим значениями.

Опираясь на исследованные свойства функции, строим её график (сделайте это самостоятельно).

№7. Исследуем функцию $y = e^{\frac{1}{x}}$ и построим её график

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$.

2) *Область значений*: позже.

3) *Пересечение графика функции с осями координат.* График функции не пересекается с осью абсцисс, поскольку уравнение $y = 0$ не имеет решений. В точке $x = 0$ функция не определена, поэтому её график не пересекается и с осью ординат.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*: функция принимает положительные значения на всей области определения.

5) *Чётность (нечётность).* Так как при всех допустимых x не выполняется ни тождество $y(-x) = -y(x)$, ни тождество $y(-x) = y(x)$, то функция не является ни нечётной, ни чётной.

6) *Периодичность.* Функция не является периодической.

7) *Непрерывность.* Функция является непрерывной при $x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$; $x = 0$ – точка разрыва.

8) *Дифференцируемость.* Функция дифференцируема на своей области определения, причём $y' = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

9) *Монотонность.* Поскольку $y' = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} < 0$ на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, то функция убывает на каждом из этих интервалов.

10) *Локальные экстремумы.* Так как производная нигде не обращается в нуль, то у функции нет точек возможного экстремума, а значит, нет локальных экстремумов.

11) Найдём *асимптоты* графика функции. При $x \to 0$ с правой стороны значение функции стремится к $+\infty$. (При $x \to 0$ с левой стороны значение функции стремится к 0.) Это означает, что $x = 0$ – вертикальная аси́мптота графика функции.

Будем искать теперь наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ в виде $y = k_1x + b_1$, где $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$, тогда $b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - k_1x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - 0\right) = 1$. То есть имеется горизонтальная асимптота $y \equiv 1$. Такая же асимптота имеется и при $x \to -\infty$.

12) *Выпуклость и точки перегиба.* Найдём $y'' = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}(1 + 2x)}{x^4}$. Функция выпукла вверх там, где $y'' < 0$, т.е. при $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$. Функция выпукла вниз, где $y'' > 0$, т.е. при $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \bigcup (0, +\infty)$.

График функции имеет единственную точку перегиба $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2})$.

13) *Область значений функции*: $E(y) = (0, 1) \bigcup (1, +\infty)$. Функция ограничена снизу, но не ограничена сверху. Наименьшее значение не

существует, а точная нижняя грань функции равна 0.

Опираясь на выявленные свойства функции, строим её график (сделайте это самостоятельно).

№8. Исследуем данный многочлен 3-й степени $y = 12x - x^3 = -x(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$ и построим его график, который называется кубической параболой.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y) = (-\infty, +\infty)$.

3) *Пересечение графика функции с осями координат.* Чтобы найти точки пересечения графика с осью Ox (нули функции), решим уравнение $y = 0$ и получим точки $x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{3}$. Чтобы найти единственную точку пересечения с осью Oy, положим $x = 0$ и получим $y = 0$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*:

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \bigcup (0, 2\sqrt{3}),$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-2\sqrt{3}, 0) \bigcup (2\sqrt{3}, +\infty).$$

5) *Чётность (нечётность).* Так как при всех действительных x $y(-x) = 12(-x) - (-x)^3 = -(12x - x^3) = -y(x)$, то функция является нечётной. Поэтому график функции *центрально симметричен* относительно точки начала координат.

6) *Периодичность.* Функция не является периодической.

7) *Непрерывность.* Функция является непрерывной.

8) *Дифференцируемость.* Функция дифференцируема на всей области определения, причём $y' = (12x - x^3)' = 12 - 3x^2 = -3(x^2 - 4) = -3(x - 2)(x + 2)$.

9) *Монотонность.* Выясним, где функция возрастает, для этого решим неравенство $y' > 0$:

$$-3(x - 2)(x + 2) > 0 \ \Leftrightarrow\ -2 < x < 2;$$

Найдём, где функция убывает ($y' < 0$):

$$-3(x - 2)(x + 2) < 0 \ \Leftrightarrow\ x \in (-\infty, -2) \bigcup (2, +\infty).$$

10) *Локальные экстремумы.* Приравняв производную к нулю, найдём критические точки 1-го рода (точки возможного экстремума): $-3(x - 2)(x + 2) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = -2, 2$. При этом в точке $x = 2$ производная меняет знак с $+$ на $-$, а в точке $x = -2$, наоборот, с $-$ на $+$.

Это означает, что функция имеет локальный максимум, равный 16, в точке $x = 2$, и локальный минимум, равный (-16), в точке $x = -2$.

11) Найдём *асимптоты* графика функции. Вертикальных асимптот нет. Будем искать наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ в виде $y = k_1 x + b_1$, где $k_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (12 - x^2) = -\infty$. Так как коэффициент получился равным бесконечности, то это означает, что наклонной асимптоты при $x \to +\infty$ нет. Аналогично проверяется, что нет наклонной асимптоты и при $x \to -\infty$.

12) *Выпуклость и точки перегиба.* Найдём $y'' = -6x$. Функция выпукла вверх там, где $y'' < 0$, т.е. при $x \in (0, +\infty)$. Функция выпукла вниз, где $y'' > 0$, т.е. при $x \in (-\infty, 0)$.

График функции имеет единственную точку перегиба $(0, 0)$ (в этой точке выпуклость вниз сменяется выпуклостью вверх).

14) *Ограниченность, наибольшее (наименьшее) значения. Точные грани.* Так как функция не ограничена ни снизу, ни сверху, то у неё не существуют ни наибольшее, ни наименьшее значения. Конечных точных граней нет.

Опираясь на исследованные свойства функции, строим её график (сделайте это самостоятельно).

№9. Исследуем рациональную функцию $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ и построим её график.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty, -2) \bigcup (-2, 2) \bigcup (2, +\infty)$.

2) *Область значений*: позже.

3) *Пересечение графика функции с осями координат.* Чтобы найти точки пересечения графика с осью Ox (нули функции), решим уравнение $y = 0$ и получим единственную точку $x = 0$. Чтобы найти точку пересечения с осью Oy, положим $x = 0$ и получим $y = 0$. То есть график функции пересекает обе координатные оси в начале координат.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*:

$$y > 0 \text{ при } x \in (-2, 0) \bigcup (2, +\infty),$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty, -2) \bigcup (0, 2).$$

5) *Чётность (нечётность).* Так как при всех допустимых x $y(-x) = \dfrac{(-x)}{(-x)^2 - 4} = -\dfrac{x}{x^2 - 4} = -y(x)$, то функция является нечёт-

ной. Поэтому график функции имеет *центр симметрии* в точке начала координат.

6) *Периодичность.* Функция не является периодической.

7) *Непрерывность, точки разрыва.* Функция является непрерывной на каждом из промежутков $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(2,+\infty)$. Точки $x=\pm 2$ являются точками разрыва графика функции.

8) *Дифференцируемость.* Функция дифференцируема на всей области определения, причём $y' = -\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$.

9) *Монотонность.* Так как при всех допустимых x производная принимает отрицательные значения

$$-\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2} < 0,$$

то функция убывает на каждом из интервалов $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(2,+\infty)$.

10) *Локальные экстремумы.* Так как производная нигде не обращается в нуль, то функция не имеет локальных экстремумов.

11) Найдём вертикальные *асимптоты* графика функции. Поскольку $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x}{x^2-4} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{x}{x^2-4} = -\infty$, то прямые $x=\pm 2$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Теперь поищем наклонную асимптоту при $x\to+\infty$ в виде $y = k_1x+b_1$, где $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2-4} = 0$. Тогда $b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-0\right) = 0$. То есть имеется горизонтальная асимптота $y\equiv 0$. Такая же асимптота имеется и при $x\to-\infty$.

12) *Выпуклость и точки перегиба.*

Найдём $y'' = \dfrac{2x(x-2)(x+2)(x^2+12)}{(x^2-4)^4}$. Функция выпукла вверх там, где $y''<0$, т.е. при $x\in(-\infty,-2)\bigcup(0,2)$. Функция выпукла вниз, где $y''>0$, т.е. при $x\in(-2,0)\bigcup(2,+\infty)$.

График функции имеет единственную точку перегиба $(0,0)$ (в этой точке выпуклость вниз сменяется выпуклостью вверх).

13) *Ограниченность, наибольшее (наименьшее) значения. Точные грани.* Область значений: $E(y)=\mathbb{R}$. Так как функция не ограничена ни снизу, ни сверху, то у неё не существуют ни наибольшее, ни наименьшее значения. Конечных точных граней также нет.

Опираясь на исследованные свойства функции, строим её график (сделайте это самостоятельно).

№10. Исследуем функцию $y = (1 - x)e^x$ и построим её график.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

2) *Область значений*: позже.

3) *Пересечение графика функции с осями координат.* График функции пересекается с осью абсцисс в точке $(1, 0)$, а с осью ординат – в точке $(0, 1)$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*: функция принимает положительные значения при $x < 1$ и отрицательные – при $x > 1$.

5) *Чётность (нечётность).* Так как при всех действительных x не выполняется ни тождество $y(-x) = -y(x)$, ни тождество $y(-x) = y(x)$, то функция не является ни нечётной, ни чётной.

6) *Периодичность.* Функция не является периодической.

7) *Непрерывность.* Функция является всюду непрерывной. Точек разрыва нет.

8) *Дифференцируемость.* Функция всюду дифференцируема, причём $y' = -xe^x$.

9) *Монотонность.* Поскольку $y' = -xe^x > 0$ при $(-\infty, 0)$, то функция возрастает на этом интервале. Поскольку $y' = -xe^x < 0$ при $(0, +\infty)$, то функция убывает на этом интервале.

10) *Локальные экстремумы.* Производная $y' = -xe^x = 0$ в единственной точке $x = 0$, причём меняет в этой точке знак с плюса на минус. Поэтому $x = 0$ – точка локального максимума, а сам максимум равен e.

11) Найдём *асимптоты* графика функции. Вертикальных аси́мптот у графика функции нет.

Найдём наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ в виде $y = k_1 x + b_1$, где $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1-x)e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1}{x} - e^x) = -\infty$, то есть наклонной асимптоты нет.

Найдём наклонную асимптоту при $x \to -\infty$ в виде $y = k_2 x + b_2$, где $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(1-x)e^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (\dfrac{1}{x} - e^x) = 0$. Тогда $b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x)e^x = 0$. То есть имеется горизонтальная асимптота $y \equiv 0$.

12) *Выпуклость и точки перегиба.* Найдём $y'' = -e^x(1 + x)$. Функ-

ция выпукла вверх там, где $y'' < 0$, т.е. при $x \in (-1, +\infty)$. Функция выпукла вниз, где $y'' > 0$, т.е. при $x \in (-\infty, -1)$.

График функции имеет единственную точку перегиба $(-1, \frac{2}{e})$.

13) *Область значений функции*: $E(y) = (-\infty, e]$. Функция не ограничена снизу, но ограничена сверху. Наименьшее значение не существует, наибольшее значение (совпадает с точной верхней гранью) равно e и достигается в точке единственного локального максимума.

14) *Поведение функции на правой границе области определения.* $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x)e^x = -\infty$.

Опираясь на выявленные свойства функции, строим её график (сделайте это самостоятельно).

№11. Исследуем рациональную функцию $y = 2x + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$ и построим её график.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y) = (-\infty, +\infty)$.

3) *Пересечение графика функции с осями координат.* Чтобы найти точки пересечения графика с осью Ox (нули функции), решим уравнение $y = 0$ и получим единственную точку $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. С осью Oy график функции не пересекается, так как функция не определена в точке $x = 0$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*:

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty),$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}).$$

5) *Чётность (нечётность).* Так как при всех действительных x не выполняется ни тождество $y(-x) = -y(x)$, ни тождество $y(-x) = y(x)$, то функция не является ни нечётной, ни чётной.

6) *Периодичность.* Функция не является периодической.

7) *Непрерывность, точки разрыва.* Функция является непрерывной на каждом из промежутков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва графика функции.

8) *Дифференцируемость.* Функция дифференцируема на всей области определения, причём $y' = 2 - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2(x^3-1)}{x^3}$.

9) *Монотонность.* Выясним, где функция возрастает, для этого решим неравенство $y' > 0$:

$$\frac{2(x^3-1)}{x^3} > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, 0)\bigcup(1, +\infty);$$

Найдём, где функция убывает ($y' < 0$):

$$\frac{2(x^3-1)}{x^3} < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (0, 1).$$

10) *Локальные экстремумы.* Производная $y' = \dfrac{2(x^3-1)}{x^3} = 0$ в единственной точке $x = 1$, причём меняет в этой точке знак с минуса на плюс. Поэтому $x = 1$ – точка локального минимума, а сам минимум равен 3.

11) Найдём вертикальные *асимптоты* графика функции. Поскольку $\lim\limits_{x\to+0}\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-0}\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$, то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Найдём наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ в виде $y = k_1x + b_1$, где $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^3}\right) = 2$. Тогда $b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - k_1x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\dfrac{1}{x^2}-2x\right) = 0$. То есть имеется горизонтальная асимптота $y = 2x$.

Найдём теперь наклонную асимптоту при $x \to -\infty$ в виде $y = k_2x + b_2$, где $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^3}\right) = 2$. Тогда $b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - k_1x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\dfrac{1}{x^2}-2x\right) = 0$. То есть имеется общая наклонная асимптота $y = 2x$ при $x \to \pm\infty$.

12) *Выпуклость и точки перегиба.* Найдём $y'' = \dfrac{6}{x^4} > 0$, поэтому функция выпукла вниз на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Так как вторая производная нигде не равна нулю, то график функции не имеет точек перегиба.

13) *Ограниченность, наибольшее (наименьшее) значения. Точные грани.* Область значений: $E(y) = \mathbb{R}$. Так как функция не ограничена ни снизу, ни сверху, то у неё не существуют ни наибольшее, ни наименьшее значения. Конечных точных граней также нет.

Опираясь на исследованные свойства функции, строим её график (сделайте это самостоятельно).

№12. Исследуем функцию $y = x + \operatorname{arctg} x$ и построим её график.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y) = (-\infty, +\infty)$.

3) *Пересечение графика функции с осями координат.* Чтобы найти точки пересечения графика с осью Ox (нули функции), решим уравнение $y = 0$ и получим единственную точку $x = 0$. В этой же точке график пересекается с осью Oy.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*:

$$y > 0 \text{ при } x \in (0, +\infty),$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty, 0).$$

5) *Чётность (нечётность).* Так как при всех действительных x $y(-x) = -y(x)$, то функция является нечётной (иначе: функция является нечётной как сумма двух нечётных функций). Следовательно, в начале координат имеется центр симметрии графика функции.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

7) *Непрерывность, точки разрыва.* Функция всюду непрерывна, точек разрыва нет.

8) *Дифференцируемость*. Функция всюду дифференцируема, производная равна $y' = 1 + \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2+x^2}{1+x^2}$.

9) *Монотонность*. Поскольку $y' = \dfrac{2+x^2}{1+x^2} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то функция монотонно возрастает на всей числовой прямой.

10) *Локальные экстремумы.* Так как производная нигде не обращается в нуль, то функция не имеет локальных экстремумов.

11) Вертикальных *асимптот* график функции не имеет.

Найдём наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ в виде $y = k_1 x + b_1$, где $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}) = 1$. Тогда $b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + \operatorname{arctg} x - x) = \dfrac{\pi}{2}$. То есть имеется наклонная асимптота $y = x + \dfrac{\pi}{2}$.

Найдём теперь наклонную асимптоту при $x \to -\infty$ в виде $y = k_2 x + b_2$, где $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1$. Тогда

$b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - k_1x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x + \operatorname{arctg} x - x) = -\dfrac{\pi}{2}$. То есть имеется наклонная асимптота $y = x - \dfrac{\pi}{2}$.

12) *Выпуклость и точки перегиба.* Найдём $y'' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, поэтому функция выпукла вниз при $x \in (-\infty, 0)$ и выпукла вверх при $x \in (0, +\infty)$. Точка $(0, 0)$ – точка перегиба графика функции.

13) *Ограниченность, наибольшее (наименьшее) значения. Точные грани.* Область значений: $E(y) = \mathbb{R}$. Так как функция не ограничена ни снизу, ни сверху, то у неё не существуют ни наибольшее, ни наименьшее значения. Конечных точных граней также нет.

Опираясь на исследованные свойства функции, строим её график (сделайте это самостоятельно).

№13. Построим график функции $y = 3^{\frac{x+2}{x-1}}$.

Решим задачу «ускоренным способом», используя только возможность вычисления пределов этой функции. Очевидно, что функция не определена только в точке $x = 1$ (точка разрыва графика функции). Вычислим односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to1-0} 3^{\frac{x+2}{x-1}} = 0, \quad \lim_{x\to1+0} 3^{\frac{x+2}{x-1}} = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика.

Вычислим теперь пределы функции при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} 3^{\frac{x+2}{x-1}} = 3.$$

Значит, график имеет общую горизонтальную асимптоту.

Уже можно построить эскиз графика функции.

№14. В полярной системе координат постройте кривые:

а) $r = 1$, б) $r = \varphi$ (спираль Архимеда).

а) Данное уравнение определяет в полярной системе координат окружность с центром в начале координат (полюсе) и радиусом, равным 1.

б) Постройте данную непрерывную кривую, например, с помощью пробных точек $\varphi = 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; \ldots$ Соединяя непрерывной линией полученные точки, вы увидите спираль, раскручивающуюся против часовой стрелки вокруг начала координат.

7 СЕМИНАР: Первообразная и неопределённый интеграл. Основные приёмы интегрирования

Раздел: Математический анализ функций одной действительной переменной. Интегральное исчисление.

I. Понятие первоо́бразной и неопределённого интеграла и их свойства. Таблица неопределённых интегралов.

II. Основные методы интегрирования: сведение к табличным интегралам, замена переменной, интегрирование «по частям».

Практика: изучение основных приёмов вычисления неопределённых интегралов.

ЛИТЕРАТУРА.

[4] Раздел 4 (Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения), Гл. 10 (Неопределённый интеграл), §10.1 (Непосредственное интегрирование), §10.2 (Метод замены переменной), §10.3 (Метод интегрирования по частям).

[5] Гл. 6 (Интегрирование) §1 (Первообразная и неопределённый интеграл), §2 (Основные методы интегрирования).

Контроль знаний: проверка выполнения домашнего задания.

7.1 Задачи на нахождение первообразных и свойства интегралов

Первоо́бразная. Пусть на интервале (a, b), возможно бесконечном, определена функция одной действительной переменной $f(x)$. Функция $F(x)$ называется *первоо́бразной* по отношению к функции $f(x)$ на интервале (a, b), если в любой точке этого интервала функция $F(x)$ имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$.

Например, функция $\sin x$ является первоо́бразной для функции $\cos x$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, поскольку $(\sin x)' = \cos x$.

Заметим, что если функция $f(x)$ имеет на (a, b) хотя бы одну первоо́бразную функцию $F(x)$, то она имеет на этом интервале сразу бесконечное множество первообразных, поскольку любая функция вида $F(x) + C$, где C – произвольное действительное число, также будет удовлетворять определению первообразной.

Неопределённый интеграл. Совокупность всех первоо́бразных функций для данной функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом множестве и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на (a, b), C – произвольная действительная константа.

Основные свойства неопределённого интеграла следуют из его определения:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$ (свойства 1-2 отражают взаимно обратный характер операций интегрирования и дифференцирования).

3. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$, где $C \neq 0$ (постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла).

4. $\int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (подразумевается, что обе функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на одном и том же множестве). Свойства 3 и 4 отражают свойство *линейности* неопределённого интеграла.

№1. Найдите первообразные $F(x)$ к функциям на множестве $\mathbb{R}$:

$$\text{а) } f(x) = \cos 2x; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad \text{в) } f(x) = e^{-x}.$$

№2. Приведите пример функции, не имеющей первообразной на заданном промежутке.

№3. Верно ли, что $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$? Какими способами это можно проверить?

7.2 Задачи на вычисление интегралов сведением к табличным

Таблица простейших неопределённых интегралов. Правильность выполненного интегрирования всегда можно проверить, продифференцировав полученный результат.

Интегралы от степенны́х функций:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \in \mathbb{R},\, n \neq -1,\, x \in \mathbb{R})$;

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $(x \neq 0)$.

Интегралы от показательных (в частности, экспоненциальной при $a = e$) функций:

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0,\, a \neq 1,\, x \in \mathbb{R})$, $\quad \int e^x dx = e^x + C$.

Интегралы от тригонометрических функций:

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$ $(x \in \mathbb{R})$;

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $(x \in \mathbb{R})$;

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ $(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\, n \in \mathbb{Z})$;

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ $(x \neq \pi n,\, n \in \mathbb{Z})$.

Интегралы от рациональных функций ($a > 0$):

8. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R});$

9. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (x \neq \pm a);$

Интегралы от иррациональных функций:

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C, \\ -\arccos\frac{x}{a} + C \end{cases} \quad (|x| < a);$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (x^2 \pm a^2 > 0);$

Интегралы от гиперболических функций:

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \quad (x \in \mathbb{R});$
13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \quad (x \in \mathbb{R});$
14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C \quad (x \in \mathbb{R});$
15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0).$

№4. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$$

№5. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int (2x^8 + e^x 2^x) dx.$$

№6. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{9x^2+1}.$$

№7. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

№8. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

№9. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} dx.$$

№10. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+1}dx.$$

№11. Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \frac{2x-1}{2x+1}dx.$$

№12. Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \left(x^4+\sqrt[5]{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx.$$

№13. Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$$

№14. Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$$

№15. Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx.$$

№16. Используя формулу понижения степени $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \sin^2 x\cos^2 x dx.$$

№17. Используя формулу $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$, вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \sin 3x\cos x dx.$$

№18. Вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}.$$

№19. Используя домножение на сопряжённое выражение, вычислите неопределённый интеграл: $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

№20. Вычислите неопределённый интеграл: $\int \operatorname{th}^2 x dx$.

№21. Вычислите неопределённый интеграл: $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

7.3 Задачи на замену переменной интегрирования

Возможны два случая.

(А) *Внесение функции под знак дифференциала.* Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где функция $g(t)$ непрерывна на множестве T, а функция $t = t(x)$ – непрерывна на соответствующем множестве X вместе со своей производной $t'(x)$, то справедлива следующая формула перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int g(t(x))t'(x)dx = \int g(t)dt. \tag{1}$$

При этом производная $t'(x)$ вносится под знак дифференциала согласно известному свойству дифференциала $t'(x)dx = d(t(x))$. В простейших случаях, чтобы распознать эту ситуацию, бывает достаточно знания табличных интегралов, например,

$$2xdx = d(x^2),\ \cos x dx = d(\sin x),\ \sin x dx = -d(\cos x),\ \frac{dx}{x} = d(\ln x),$$

$$\frac{dx}{x^2+1} = d(\operatorname{arctg} x),\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}),\ \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x),\ e^{2x}dx = d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right).$$

Вычислив интеграл $\int g(t)dt = G(t) + C$, в конце необходимо вернуться к первоначальной переменной интегрирования x путем обратной подстановки $t = t(x)$:

$$\int f(x)dx = G(t(x)) + C.$$

(B) *Использование подстановок.* Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b), то, полагая $x = x(t)$, где функция $x(t)$ непрерывна на соответствующем интервале (t_0, t_1) вместе со своей производной $x'(t)$, получим ещё одну формулу перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t)dt. \tag{2}$$

Вычислив интеграл, в конце необходимо вернуться к первоначальной переменной x, сделав обратную подстановку $t = t(x)$ (выражаем t через x из равенства $x = x(t)$):

№22. Полагая $t = -1/x$, вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{e^{\frac{1}{x}}x^2}.$$

№23. Полагая $t = \cos(x/3)$, вычислите интеграл

$$\int \operatorname{tg}\frac{x}{3}dx.$$

№24. Переходя к $d(3x+1)$, вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{3x+1}.$$

№25. Переходя к $d(x^2+2)$, вычислите интеграл

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}.$$

№26. Полагая $t = \dfrac{2x+1}{5}$, вычислите интеграл

$$\int \cos\frac{2x+1}{5}dx.$$

№27. Полагая $t = \ln x$, вычислите интеграл

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx.$$

№28. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-3}.$$

№29. Полагая $t = 2+5x$, вычислите неопределённый интеграл

$$\int (2+5x)^9 dx.$$

№30. Полагая $t = \operatorname{arctg} x$, вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx.$$

№31. Полагая $t = \sin x$, вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx.$$

№32. Используя универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}(x/2)$ и формулу $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

№33. Используя тождество $1+\sin x = \left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$ и делая затем замену $t = \operatorname{tg}(x/2)$, вычислите неопределённый интеграл:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

№34. Переходя к $d(\sqrt{x})$ (с последующей заменой $t = \sqrt{x}$ или без неё), вычислите неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

7.4 Задачи на интегрирование по частям

Теорема (*формула интегрирования по частям*). Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые на одном и том же множестве функции и существует первообразная для функции $u(x)v'(x)$. Тогда существует и первообразная для функции $v(x)u'(x)$, причём справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

или, в краткой форме, $\int udv = uv - \int vdu$.

В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путем интегрирования.

№35. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int xe^{5x}dx.$$

№36. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int \ln(1-x)dx.$$

№37. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int x\sin 3xdx.$$

№38. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int x^2\cos xdx.$$

№39. Вычислите неопределённый интеграл

$$\int 3^x\cos xdx.$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ:

7.1. Задачи на нахождение первообразных и свойства интегралов.

№1. а) Для функции $f(x) = \cos 2x$ первообразной будет любая из функций вида $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C$, где C – произвольная константа, так как $(\frac{1}{2}\sin 2x + C)' = \cos 2x$;
б) для функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ первообразной будет любая из функций вида $F(x) = \operatorname{arctg} x + C$, так как $(\operatorname{arctg} x + C)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
в) для $f(x) = e^{-x}$ первообразной будет любая из функций вида $F(x) = -e^{-x} + C$, так как $(-e^{-x} + C)' = e^{-x}$.

№2. Рассмотрим функцию $\operatorname{sgn} x$ на интервале $(-1, 1)$. На интервале $(-1, 0)$ любая первообразная функции $\operatorname{sgn} x$ имеет вид $F_1 = -x + C_1$, а на интервале $(0, 1)$ любая первообразная имеет вид $F_2(x) = x + C_2$. При любом выборе постоянных C_1 и C_2 мы получаем на интервале $(-1, 1)$ функцию, не имеющую производной в точке $x = 0$ (левая производная в нуле не равна правой производной). Например, если выбрать $C_1 = C_2 = C$, то получим функцию $F(x) = |x| + C$, недифференцируемую в точке 0. Следовательно, функция $\operatorname{sgn} x$ не имеет первообразной на интервале $(-1, 1)$ и вообще на любом промежутке, содержащем точку 0.

№3. Да, верно. Это можно проверить двумя способами.

1-й способ. Вычислим этот интеграл, используя формулу интегрирования по частям $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$. Здесь $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$, тогда $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$:

$$\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2-й способ. Равенство $\int f(x)dx = F(x) + C$ можно также проверить, продифференцировав его по x. В данном случае получим

$$\left(\int xe^x dx\right)' = (xe^x - e^x + C)'.$$

Производная в левой части данного равенства равна подынтегральной функции xe^x. Дифференцированием легко убедиться в том, что и производная в правой части равенства тоже равна этому выражению.

7.2. Задачи на вычисление интегралов сведением к табличным.

№4. Это табличный интеграл от степеннóй функции

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C, \quad x > 0.$$

№5. $\int (2x^8 + (2e)^x) dx = \dfrac{2x^9}{9} + \dfrac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C.$

№6. $\int \dfrac{dx}{9x^2+1} = \dfrac{1}{3}\int \dfrac{d(3x)}{(3x)^2+1} = \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(3x) + C.$

№7.

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$= \operatorname{tg} x - x + C \ (\cos x \neq 0).$

№8.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(2x) + C, \quad -1 < 2x < 1.$$

№9.

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{2}\cos x + C.$$

№10.

$$\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^3(x^2+1)-1}{x^2+1} dx = \int \left(x^3 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$= \dfrac{x^4}{4} - \operatorname{arctg} x + C.$

№11.

$$\int \frac{2x-1}{2x+1} dx = \int \frac{(2x+1)-2}{2x+1} dx = \int \left(1 - \frac{2}{2x+1}\right) dx =$$

$$= x - \int \frac{d(2x)}{2x+1} = x - \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x - \ln|2x+1| + C.$$

№12.

$$\int \left(x^4 + x^{\frac{1}{5}} + 3x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} + x^{-1}\right) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x^{-1} + \ln|x| + C.$$

№13.

$$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 2 \operatorname{arctg} x - 3 \arcsin x + C,\ x \in (-1,1).$$

№14.

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int (1+\sin x) dx = x - \cos x + C.$$

№15.

$$\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx = \int \left(\left(\frac{1}{5} \right)^x + \left(\frac{1}{2} \right)^x \right) dx = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + C.$$

№16.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + C.$$

№17.

$$\int \sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} \right) + C.$$

№18.

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3} \int \frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)(x-2)} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} (\ln|x-2| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C.$$

№19.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} =$$

$$= \int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx}{2} = \frac{1}{2} \left(\int \sqrt{x+1} dx - \int \sqrt{x-1} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int \sqrt{x+1} d(x+1) - \int \sqrt{x-1} d(x-1) \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3} \right) + C,\ x \geq 1.$$

№20.
$$\int \operatorname{th}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) dx =$$
$= x - \operatorname{th} x + C$.

№21. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{sh} x)}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + C.$

7.3. Задачи на замену переменной интегрирования.

№22. Заметим, что $\dfrac{dx}{x^2} = d\left(-\dfrac{1}{x}\right)$:
$$\int \frac{dx}{e^{\frac{1}{x}} x^2} = \int \frac{d\left(-\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}}.$$
Положим $t = -1/x$, тогда: $\int \dfrac{dt}{e^{-t}} = \int e^t dt = e^t + C = e^{-\frac{1}{x}} + C$, $x \neq 0$.

№23.
$$\int \operatorname{tg} \frac{x}{3} dx = \int \frac{\sin \frac{x}{3} dx}{\cos \frac{x}{3}} = -3 \int \frac{d(\cos \frac{x}{3})}{\cos \frac{x}{3}}.$$
Положим $t = \cos(x/3)$, тогда интеграл примет вид
$$-3 \int \frac{dt}{t} = -3 \ln |t| + C = -3 \ln \left|\cos \frac{x}{3}\right| + C.$$

№24. Поскольку $d(3x + 1) = 3dx$, то $dx = \frac{1}{3} d(3x + 1)$ и получаем
$$\int \frac{dx}{3x + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x + 1)}{3x + 1} = \frac{1}{3} \ln |3x + 1| + C,\ x \neq -\frac{1}{3}.$$

№25. Поскольку $d(x^2 + 2) = 2xdx$, то $xdx = \frac{1}{2} d(x^2 + 2)$ и получаем
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$
Сделаем замену $t = x^2 + 2$, тогда получим
$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2 + 2} + C.$$

№26. Положим $t = \dfrac{2x + 1}{5}$, тогда $x = \dfrac{5t - 1}{2}$, $dx = \dfrac{5dt}{2}$ и получим
$$\int \cos \frac{2x + 1}{5} dx = \int \cos t \cdot \frac{5dt}{2} = \frac{5}{2} \int \cos t\, dt = \frac{5}{2} \sin t + C =$$

$= \dfrac{5}{2}\sin\dfrac{2x+1}{5} + C.$

№27. Заметим, что $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$, поэтому можно сделать подстановку $t = \ln x$ $(x > 0)$:

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int \sin(\ln x)d(\ln x) = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos\ln x + C.$$

№28. Имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{dx}{(x+3)(x-1)} = \frac{1}{4}\int \frac{(x+3)-(x-1)}{(x+3)(x-1)}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{d(x+3)}{x+3} =$$

$$= \frac{1}{4}(\ln|x-1| - \ln|x+3|) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C \quad (x \neq -3; 1).$$

№29. Положим $t = 2 + 5x$, тогда $x = \dfrac{t-2}{5}$, $dx = \dfrac{dt}{5}$ и получим

$$\int (2+5x)^9 dx = \int t^9 \cdot \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int t^9 dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{10}}{10} + C = \frac{1}{50}(2+5x)^{10} + C.$$

№30. Заметим, что $\dfrac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$, тогда, полагая $t = \operatorname{arctg} x$, получим

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx = \int e^{\operatorname{arctg} x} d(\operatorname{arctg} x) = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

№31.Заметим, что $\cos x dx = d(\sin x)$, поэтому можно положить $t = \sin x$, и тогда получим

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = -\frac{t^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2(\sin x)^2} + C.$$

№32. В силу периодичности подынтегральной функции, достаточно найти первообразую на любом из периодов. Воспользуемся универсальной подстановкой $t = \operatorname{tg}(x/2)$, $x \in (-\pi, \pi)$, откуда $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ и формулой $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, тогда получим

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1} + C =$$

$$= -\frac{2}{\operatorname{tg}(x/2)+1} + C.$$

№33. Учтём, что $\dfrac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = 2d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})$ и затем сделаем замену $t = \operatorname{tg}(x/2)$:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)^2} =$$

$$= 2\int \frac{d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)^2} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}(x/2)+1} + C.$$

№34. При $0 < x < 1$ имеем $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$, поэтому, вводя $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$, $dx = 2tdt$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t + C =$$

$$= 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

7.4. Задачи на интегрирование по частям.

№35. Возьмём $u(x) = x$, $v'(x) = e^{5x}$, тогда $u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{1}{5}e^{5x}$:

$$\int xe^{5x}dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C.$$

№36. Возьмём $u(x) = \ln(1-x)$, $v'(x) = 1$, тогда $u'(x) = \frac{1}{x-1}$, $v(x) = x$:

$$\int \ln(1-x)dx = x\ln(1-x) - \int \frac{xdx}{x-1} = x\ln(1-x) - \int \frac{(x-1)+1}{x-1}dx =$$

$$= x\ln(1-x) - \int \left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx = x\ln(1-x) - \int dx - \int \frac{d(x-1)}{x-1} =$$

$$= x\ln(1-x) - x - \ln|x-1| + C, \quad x < 1.$$

№37. Возьмём $u(x) = x$, $v'(x) = \sin 3x$, тогда $u'(x) = 1$, $v(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$:

$$\int x\sin 3xdx = -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3xdx =$$

$$= -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

№38. Возьмём $u(x) = x^2$, $v'(x) = \cos x$, тогда $u'(x) = 2x$, $v(x) = \sin x$:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx =$$

(проинтегрируем полученный интеграл по частям ещё раз, положив $u(x) = x$, $v'(x) = \sin x$, тогда $u'(x) = 1$, $v(x) = -\cos x$):

$$= x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x dx \right) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

№39. Положим $u(x) = 3^x$, $v'(x) = \cos x$, тогда $u'(x) = 3^x \ln 3$, $v(x) = \sin x$, и проинтегрируем один раз по частям:

$$I = \int 3^x \cos x dx = 3^x \sin x - \ln 3 \int 3^x \sin x dx.$$

Проинтегрируем полученный интеграл по частям, положив $u(x) = 3^x$, $v'(x) = \sin x$, тогда $u'(x) = 3^x \ln 3$, $v(x) = -\cos x$:

$$I = 3^x \sin x - \ln 3 \left(-3^x \cos x + \ln 3 \int 3^x \cos x dx \right) =$$

$$= 3^x \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cos x - \ln^2 3 \int 3^x \cos x dx =$$

$$= 3^x \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cos x - \ln^2 3 \cdot I.$$

Осталось из полученного равенства $I = 3^x \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cos x - \ln^2 3 \cdot I$ найти искомый интеграл:

$$I = \frac{3^x (\sin x + \ln 3 \cdot \cos x)}{1 + \ln^2 3} + C.$$

8 СЕМИНАР: Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определённого интеграла

Раздел: Математический анализ функций одной действительной переменной. Интегральное исчисление.

I. Понятие определённого интеграла Римана как предела интегральной суммы. Геометрический смысл ОИ как площади криволинейной трапеции. Интегрируемость непрерывных, кусочно-непрерывных и монотонных на отрезке функций. Интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной у любой непрерывной на интервале функции. Примеры неинтегрируемых по Риману функций (функция Дирихле; неограниченные функции; функции, заданные на бесконечных промежутках). Свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница как основная теорема интегрального исчисления (связь определённого и неопределённого интегралов). Основные методы интегрирования: сведение к табличным интегралам, замена переменной, интегрирование «по частям».

II. Приложения определённого интеграла: вычисление площади криволнейной трапеции, площади криволинейного сектора, длины дуги плоской кривой, объёма и площади поверхности тела вращения и др.

III. Понятие несобственных интегралов I и II рода как обобщение понятия собственного интеграла (Римана). Сходимость и расходимость.

Практика: задачи на вычисление разными методами определённых интегралов; вычисление площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых, объёмов и площадей поверхностей тел вращения. Примеры вычисления несобственных интегралов.

Контроль знаний: проверка выполнения домашнего задания.

ЛИТЕРАТУРА.

[4] Раздел 4 (Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения), Гл. 11 (Определённый интеграл), §11.1 (Методы вычисления определённого интеграла), §11.2 (Геометрические приложения определённого интеграла), §11.3 (Несобственные интегралы).

[5] Гл. 6 (Интегрирование) §4 (Определённый интеграл), §5 (Некоторые физические и геометрические приложения определённого интеграла), §6 (Несобственные интегралы) – без признаков сходимости.

8.1 Задачи на вычисление определённого интеграла сведением его к табличным интегралам

№1. Вычислите определённый интеграл $\int\limits_1^2 \frac{4x+2}{2x-1}dx$.

Указание. Выполнив преобразование $\frac{4x+2}{2x-1} = \frac{2(2x-1)+4}{2x-1}$, разбейте интеграл на сумму двух интегралов.

№2. Вычислите определённый интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$.

Указание. Выполните преобразование подынтегральной функции: $\frac{1}{x^2+2x} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+2)-x}{x(x+2)}$ и разбейте на два интеграла.

№3. Вычислите определённый интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx$.

Указание. Воспользуйтесь формулой $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ и разбейте на два интеграла.

№4. Вычислите собственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Указание: учтите, что $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$.

8.2 Задачи на замену переменной

Возможны два случая.

(A) *Внесение функции под знак дифференциала.* Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где функция $g(t)$ непрерывна на множестве T, а функция $t = t(x)$ – непрерывна на соответствующем множестве X вместе со своей производной $t'(x)$, то справедлива формула перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int g(t(x))t'(x)dx = \int g(t)dt. \tag{1}$$

При этом производная $t'(x)$ вносится под знак дифференциала согласно известному свойству дифференциала $t'(x)dx = d(t(x))$. В простейших случаях, чтобы распознать эту ситуацию, бывает достаточно знания табличных интегралов, например,

$$2xdx = d(x^2),\ \cos xdx = d(\sin x),\ \sin xdx = -d(\cos x),\ \frac{dx}{x} = d(\ln x),$$

$$\frac{dx}{x^2+1} = d(\operatorname{arctg} x),\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}),\ \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x),\ e^{2x}dx = d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right).$$

Подобную замену переменной интегрирования осуществляют в тех случаях, когда получаемая в результате «новая» подынтегральная функция $g(t)$ удобнее для интегрирования по сравнению с исходной подынтегральной функцией $f(x)$. Основная сложность этого метода состоит в том, чтобы «увидеть» в исходном подынтегральном выражении $f(x)dx$ более простое для интегрирования выражение $g(t(x))t'(x)dx = g(t)dt$. Практически реализация метода заключается во внесении функции $t'(x)$ под знак дифференциала dx с образованием нового дифференциала dt. Вычислив интеграл $\int g(t)dt = G(t) + C$, в конце необходимо вернуться к первоначальной переменной интегрирования x путем обратной подстановки $t = t(x)$:

$$\int f(x)dx = G(t(x)) + C.$$

(B) *Использование подстановок.* Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, то, полагая $x = x(t)$, где функция $x(t)$ непрерывна на соответствующем множестве T вместе со своей производной $x'(t)$, получим ещё одну формулу перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t)dt. \tag{2}$$

Нередки ситуации, когда для решения одной и той же задачи могут существовать различные подстановки.

№5. Вычислите определённый интеграл $\int\limits_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx$.

Указание. Внесите x под знак дифференциала: $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$ и затем сделайте замену переменной интегрирования, положив $t = x^2 - 16$ (не забудьте изменить пределы интегрирования!)

№6. Вычислите определённый интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$.

Указание. Внося $\sin x$ под знак дифференциала, привести подынтегральное выражение к виду: $\sin^3 xdx = -\sin^2 xd(\cos x) = (\cos^2 x - 1)d(\cos x)$ и сделать замену $t = \cos x$.

8.3 Задачи на интегрирование по частям

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны вместе со своими производными 1-го порядка на сегменте $[a, b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x).$$

Метод имеет смысл применять в том случае, и так подбирать функции $f(x)$ и $g(x)$, чтобы полученный справа интеграл оказался проще исходного интеграла в левой части. Как правило, формула применяется в ситуациях, когда подынтегральная функция представляет собой произведение «разнородных» функций.

№7. Вычислите определённый интеграл $\int\limits_0^{\ln 2} xe^x dx$.

Указание. Проинтегрируйте по частям, выбрав $u = x$, $v' = e^x$ в формуле $\int_a^b uv'dx = uv\big|_a^b - \int_a^b vu'dx$.

8.4 Задачи на вычисление площадей плоских фигур

Если криволинейная трапеция ограничена сверху графиком непрерывной функции $y = y_2(x)$, снизу – графиком другой непрерывной функции $y = y_1(x)$, а слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$, то её площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int\limits_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx.$$

Симметричная формула для вычисления площади плоской фигуры, ограниченной слева и справа, соответственно, графиками непрерывных функций $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, а снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$, имеет вид:

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))dy.$$

№8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

Указание: постройте фигуру и найдите пределы интегрирования.

№9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 3 + 2x - x^2$, $y = x + 1$.

Указание. Постройте графики этих функций, чтобы визуально определить фигуру, площадь которой вычисляется. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций, приравняв $3 + 2x - x^2 = x + 1$ и решив это уравнение (тем самым вы найдёте пределы интегрирования). Затем выпишите определённый интеграл и вычислите его.

№10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 3$, $xy = 4$, $y = 2$, $x = 0$.

Указание. Постройте графики всех четырёх кривых, чтобы увидеть фигуру, площадь которой требуется найти. Найдите абсциссы точек пересечения графиков $y = x^2 + 3$ и $y = 4/x$. Разбив фигуру на две части, вычислить площадь каждой из них.

№11. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/4$.

Указание. Постройте фигуру и по ней определите пределы интегрирования.

№12. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = |x| + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

8.5 Задачи на вычисление длин дуг плоских кривых

Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные $x'(t)$ и $y'(t)$ на сегменте $[T_0, T]$. Тогда длина L соответствующего участка дуги кривой, определяемая параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, вычисляется по формуле

$$L = \int_{T_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Если кривая задана *явно* уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то её можно описать параметрическими уравнениями $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$. Длина дуги в этом случае выражается формулой:

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Если пространственная параметризуемая кривая L задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$ на сегменте $[T_0, T]$, то длина её дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{T_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

№13. Найдите длину дуги кривой, заданной явно: $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$ (изобразите кривую на плоскости).

Указание. Сводится к табличному интегралу

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$$

№14. Найдите длину дуги кривой, заданной параметрически: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (циклоида) от $t_0 = 0$ до $t_1 = \pi$.

Указание. Изобразите кривую (с помощью преподавателя или воспользовавшись справочником), а затем воспользуйтесь формулой $L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.

№15. Найдите длину дуги кривой $y = \ln(\cos x)$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$.

8.6 Задачи на вычисление объёмов тел вращения

(А) Если тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной снизу и сверху графиками непрерывных функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, а слева и справа, соответственно, вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, то объём полученного тела вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx.$$

(В) Если же тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной слева и справа графиками непрерывных функций $x = x_2(y)$ и $x = x_1(y)$, а снизу и сверху, соответственно, горизонтальными прямыми $y = c$ и $y = d$, то объём полученного тела вращения вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d (x_2^2(y) - x_1^2(y))dy.$$

№16. Найдите объём тела, образованного при вращении вокруг осей Ox и Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 4x$ $(x \geq 0)$.

Указание. Изобразите кривую, чтобы увидеть плоскую фигуру.

При вращении вокруг оси Ox по рисунку определите пределы интегрирования по переменной x. При вращении вокруг оси Oy воспользуйтесь тем же рисунком для определения пределов интегрирования по переменной y, найдите уравнения кривых $x = x_2(y)$ и $x = x_1(y)$ и примените соответствующую формулу.

№17. Найдите объём тела, образованного при вращении вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$ при $0 \leq x \leq \pi$.

№18. Найдите объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \geq 0$, вокруг: а) оси Ox, б) оси Oy.

8.7 Задачи на вычисление площадей поверхностей тел вращения

Если кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, где неотрицательная функция $y(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $[a, b]$, то площадь поверхности, полученной вращением дуги кривой вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$S_{\text{пов.,x}} = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

№19. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin x$ от $x = 0$ до $x = \pi$.

Указание: воспользуйтесь табличным интегралом

$$\int_a^b \sqrt{1+t^2}\,dt = \left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\right)\Big|_a^b.$$

№20. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = e^{-x}$ от $x = 0$ до $x = +\infty$.

8.8 Задачи на вычисление несобственных интегралов

Определенный интеграл Римана (собственный интеграл) обобщается на случаи, когда либо промежуток интегрирования бесконечен, либо подынтегральная функция является неограниченной.

1. *Несобственный интеграл 1-го рода.* Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема по Риману в любой конечной его части $[a, A]$ $(\forall A > a)$. Предел интеграла $\int_a^A f(x)dx$ при $A \to +\infty$ называют *несобственным интегралом 1-го рода* от функции $f(x)$ по полупрямой $[a, +\infty)$ и обозначают символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx.$$

В случае, когда этот предел конечен, говорят, что *интеграл сходится*, а функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* в бесконечном промежутке $[a, +\infty)$ (в несобственном смысле). Если же данный предел бесконечен или не существует, то про интеграл говорят, что он *расходится* (соответственно, функция $f(x)$ – неинтегрируема). В частности, если этот предел равен $+\infty$, то говорят, что интеграл расходится к $+\infty$. Бесконечно удалённая точка $x = +\infty$ (правый конец промежутка интегрирования) называется в этом случае *особой точкой* (особенностью 1-го рода).

Интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ определяется как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty\\ A\to+\infty}}\int_{A'}^{A} f(x)dx$$

при независимом стремлении $A \to +\infty$ и $A' \to -\infty$.

2. *Несобственный интеграл 2-го рода.* Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a, b]$ (за исключением, быть может, концов этого сегмента), но неограничена на нём. Предположим, ради определённости, что на любом отрезке вида $[a, b-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < b-a)$ функция ограничена и собственно интегрируема, но является неограниченной в левой окрестности точки b. Точка b в этом случае, вне зависимости от того, определена функция в этой точке или нет, носит название *особой точки* 2-го рода. Предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ (конечный или бесконечный) при $\varepsilon \to +0$ называют *несобственным интегралом 2-го рода* от функции $f(x)$ от a до b и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если этот предел конечен, то говорят, что интеграл *сходится*, а неограниченную функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* в пределах от a до b (в несобственном смысле). Если же данный предел бесконечен или не существует, то про интеграл говорят, что он расходится, а функция $f(x)$ – неинтегрируема на данном промежутке.

Так же, как и в случае с собственным интегралом, по определению будем считать, что если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, b]$, то

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема 1 (*Формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов 1-го рода*). Пусть функция $f(x)$ определена в бесконечном промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема в собственном смысле на любом конечном сегменте $[a, A]$ $(A > a)$. Если для $f(x)$ при этом существует первообразная функция $F(x)$ на всём промежутке $[a, +\infty)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Теорема 2 (*интегрирование по частям несобственного интеграла 1-го рода*). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывно дифференцируемы[1] на полуинтервале $[a, +\infty)$, и пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))$. Тогда из сходимости одного из интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ или $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ следует сходимость второго интеграла, причём справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x))\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

№21. Найдите несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+x)^4}$. Какого рода этот интеграл?

№22. Вычислите несобственный интеграл 1-го рода $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^3} dx$.

Указание. Проинтегрируйте по частям, положив $u = \ln x$, $v' = 1/x^3$.

№23. Найдите несобственный интеграл 1-го рода $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 4x + 9}$.

Указание. Выделите в знаменателе полный квадрат по переменной x и сделайте замену $t = x + 2$.

№24. Найдите несобственный интеграл $\int\limits_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$. Какого рода этот интеграл?

Указание. Чтобы вычислить интеграл, следует привести подынтегральное выражение к виду $\dfrac{dx}{3\sqrt{1 - (\frac{x}{3})^2}} = \dfrac{d(\frac{x}{3})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{3})^2}}$ и сделать замену $t = \dfrac{x}{3}$.

[1] То есть имеют непрерывные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на $[a, +\infty)$.

№25. Найдите несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{dx}{(x+1)^2}$. Какого он рода?

Указание. Чтобы вычислить интеграл, сделайте замену $t = x + 1$.

№26. Исследуйте сходимость несобственного интеграла 1-го рода

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx.$$

Указание: вычислите значение интеграла, если в ответе получится конечное число, то интеграл сходится, если бесконечность (с любым знаком), то расходится.

№27. Исследуйте сходимость несобственного интеграла 2-го рода

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

Указание: сделайте замену $t = x - 1$ (или $t = 1 - x$).

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ:

8.1. Задачи на вычисление определённого интеграла сведением его к табличным интегралам.

№1.

$$\int\limits_1^2 \frac{4x+2}{2x-1}dx = \int\limits_1^2 \frac{2(2x-1)+4}{2x-1}dx = \int\limits_1^2 \left(2+\frac{4}{2x-1}\right)dx =$$

$$= (2x + 2\ln|2x-1|)\Big|_1^2 = (4+2\ln 3) - (2+2\ln 1) = 2(1+\ln 3).$$

№2.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x} = \int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x+2)-x}{x(x+2)}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}(\ln|x| - \ln|x+2|)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}((\ln 2 - \ln 4) - (\ln 1 - \ln 3)) = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

№3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, d(\operatorname{tg} x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2} + \ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0| = \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \ln 1 - \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}.$$

№4.

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(\operatorname{sh} x)}{1+\operatorname{sh}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} 1) - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} 0)) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} 1).$$

8.2. Задачи на замену переменной.

№5.

$$\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^5 \sqrt{x^2-16}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int_4^5 \sqrt{x^2-16}\,d(x^2-16).$$

Сделаем замену переменной, положив $t = x^2-16$, тогда нижний предел станет равным $t=0$, а верхний – равным $t=9$. Получим

$$\frac{1}{2}\int_4^5 \sqrt{x^2-16}\,d(x^2-16) = \frac{1}{2}\int_0^9 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\bigg|_0^9 = \frac{1}{3}(\sqrt{t^3}\bigg|_0^9) =$$

$$= \frac{1}{3}(\sqrt{9^3}-\sqrt{0^3})=9.$$

№6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, d(\cos x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\, d(\cos x) =$$

$$= -\left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

8.3. Задачи на интегрирование по частям.

№7. Возьмём $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$, тогда $u'(x)=1$, $v(x)=e^x$:

$$\int_0^{\ln 2} xe^x dx = xe^x\bigg|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2\ln 2 - e^x\bigg|_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - 1.$$

8.4. Задачи на вычисление площадей плоских фигур.

№8. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4-x^2$, $y=0$, численно равна интегралу

$$S = \int_{-2}^2 (4-x^2)dx = 2\int_0^2 (4-x^2)dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^2 = \frac{32}{3}\ \text{(кв.ед.)}$$

№9. Построим графики функций $y = 3+2x-x^2 = 4-(x-1)^2$, $y = x+1$ и получим фигуру, лежащую в пределах $-1 \le x \le 2$, $x+1 \le y \le 4-(x-1)^2$. Согласно формуле, площадь фигуры численно равна определённому интегралу

$$S = \int_{-1}^2 ((3+2x-x^2)-(x+1))dx = \int_{-1}^2 (2+x-x^2)dx =$$

$$= \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \left(4 + 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2} \text{ (кв.ед.)}$$

№10. Построим кривые $y = x^2 + 3$, $y = \frac{4}{x}$, $y = 2$, $x = 0$. Эти графики ограничивают фигуру, которая является объединением двух фигур:

$$S_1 = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le x^2 + 3\},$$

$$S_2 = \left\{(x, y) \mid 1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le \frac{4}{x}\right\}.$$

Искомая площадь всей фигуры равна сумме площадей S_1 и S_2:

$$S = \int_0^1 ((x^2 + 3) - 2)dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^1 + (4\ln|x| - 2x)\Big|_1^2 = \frac{4}{3} + (4\ln 2 - 2) = 4\ln 2 - \frac{2}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

№11. Кривые $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/4$ ограничивают фигуру $\{(x, y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le y \le \cos 2x\}$. Её площадь равна определённому интегралу

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \text{ (кв.ед.)}$$

№12. Построим фигуру, ограниченную линиями $y = |x| + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$. Чтобы вычислить её площадь, разобъём фигуру на две фигуры

$$S_1 = \{(x, y) \mid -2 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1 - x\},$$

$$S_2 = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 + x\}.$$

Тогда площадь равна

$$S = \int_{-2}^0 (1 - x)dx + \int_0^1 (1 + x)dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^0 + \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{2}.$$

8.5. Задачи на вычисление длин дуг плоских кривых.

№13. Чтобы найти длину кривой $y = 2\sqrt{x}$ $(y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}})$ в пределах от $x = 0$ до $x = 1$, воспользуемся формулой

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1+x}\,d(\sqrt{x}).$$

Положим $t = \sqrt{x}$, пределы интегрирования сохраняются, тогда

$$2\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = \left(t\sqrt{t^2+1} + \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right)\Big|_0^1 = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}).$$

№14. Найдём длину дуги кривой, заданной параметрически: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (циклоида) от $t_0 = 0$ до $t_1 = \pi$. Имеем $x'(t) = 1 - \cos t$, $y'(t) = \sin t$, тогда

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int_0^{\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}dt = \int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}dt = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 4.$$

№15. Найдём длину дуги кривой $y = \ln(\cos x)$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$. С учётом $y' = -\operatorname{tg} x$ и формулы $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, имеем

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x}.$$

Положим $t = \sin x$, тогда приходим к интегралу

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1+t)+(1-t)}{(1-t)(1+t)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|t+1| - \ln|t-1|)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

8.6. Задачи на вычисление объёмов тел вращения.

№16. Плоская фигура имеет вид: $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ x^3 \le y \le 4x\}$.

1) Объём тела, образованного при вращении этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox, находится по формуле:

$$V_x = \pi\int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx = \pi\int_0^2 ((4x)^2 - (x^3)^2)dx =$$

$$= \pi \int_0^2 (16x^2 - x^6)dx = \pi \left(\frac{16x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^2 = 128\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = \frac{512}{21}\pi.$$

2) Объём тела, образованного при вращении криволинейной трапеции вокруг оси Oy, находится по формуле:

$$V_y = \pi \int_c^d (x_2^2(y) - x_1^2(y))dy.$$

Найдём $x = x_1(y)$, выразив x через y из равенства $y = 4x$: $x = y/4$. Найдём $x = x_2(y)$, выразив x через y из равенства $y = x^3$: $x = \sqrt[3]{y}$. Тогда

$$V_y = \pi \int_0^8 ((\sqrt[3]{y})^2 - (y/4)^2)dy = \pi \int_0^8 \left(y^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{16}y^2\right) dy =$$

$$= \pi \left(\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{1}{16} \cdot \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^8 = \pi \left(\frac{3}{5}8^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{16} \cdot \frac{8^3}{3}\right) = \frac{128\pi}{15} \text{ (куб.ед.)}$$

№17. Объём тела, образованного при вращении вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$, находится по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \text{ (куб.ед.)}$$

№18. Объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \ge 0$, вокруг оси Ox, находится по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx = \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = ...$$

Объём тела, образованного при вращении данной криволинейной трапеции вокруг оси Oy, находится по формуле:

$$V_y = \pi \int_c^d (x_2^2(y) - x_1^2(y))dy.$$

Из равенства $y = 4 - x^2$ находим $x_2(y) = \sqrt{4 - y}$, а $x_1(y) = 0$, поэтому

$$V_y = \pi \int_0^4 (\sqrt{4 - y})^2 dy = \pi \int_0^4 (4 - y)dy = \pi \left(4y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 8\pi \text{ (куб.ед.)}$$

8.7. Задачи на вычисление площадей поверхностей тел вращения.

№19. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin x$ ($y' = \cos x$) от $x = 0$ до $x = \pi$, находится по формуле

$$S_{\text{пов.,х}} = 2\pi \int_a^b |y(x)|\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x}dx =$$

$$= -2\pi \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x}\, d(\cos x).$$

Сделаем замену $t = \cos x$, тогда получим

$$S_{\text{пов.,х}} = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt =$$

$$= 4\pi \left(\frac{t}{2}\sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right) \text{ (кв.ед.)}$$

№20. Нахождение площади поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = e^{-x}$ от $x = 0$ до $x = +\infty$, сводится к вычислению определённого (несобственного) интеграла

$$S_{\text{пов.,х}} = 2\pi \int_a^b |y(x)|\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{1 + (-e^{-x})^2}dx =$$

$$= -2\pi \int_0^{+\infty} \sqrt{1 + (e^{-x})^2}d(e^{-x}) = (\text{положим } \ t = e^{-x})$$

$$= -2\pi \int_1^0 \sqrt{1 + t^2}dt = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}dt.$$

Воспользуемся табличным интегралом

$$\textstyle\int_a^b \sqrt{1 + t^2}\, dt = \left(\frac{t}{2}\sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|\right)\Big|_a^b$$

и получим окончательно

$$S_{\text{пов.,х}} = 2\pi \left(\frac{t}{2}\sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))\ \text{(кв.ед.)}$$

8.8. Задачи на вычисление несобственных интегралов.

№21. Найдём несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+x)^4}$.

Так как интеграл берётся по бесконечному промежутку, то это – несобственный интеграл 1-го рода. Перейдём к дифференциалу $d(x+1)$ и сделаем замену $t = x + 1$:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{d(x+1)}{(1+x)^4} = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{3t^3}\Big|_2^{+\infty} = -\frac{1}{3}\left(0 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{24}.$$

№22. Проинтегрируем по частям, положив $u = \ln x$, $v' = 1/x^3$, тогда $u' = 1/x$, $v = -1/(2x^2)$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} =$$

$$= -\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{\ln 1}{2}\right) - \frac{1}{4x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4}.$$

№23. Выделив в знаменателе полный квадрат по x, сделаем замену $t = x + 2$ и перейдём к дифференциалу $d(x+2)$ (заметим, что пределы интегрирования при этом не изменятся):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 5} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} - \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

№24. Так как подынтегральная функция не ограничена (стремится к бесконечности при $x \to 3$ слева), то данный интеграл – несобственный 2-го рода с особой точкой $x = 3$. Положим $t = x/3$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \int_0^3 \frac{d(\frac{x}{3})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{3})^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

№25. Так как подынтегральная функция не ограничена в правой окрестности точки $x = -1$ (функция стремится к бесконечности, когда x стремится к -1), то данный интеграл – несобственный 2-го рода.

Чтобы вычислить его, сделаем подстановку $t = x + 1$:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_{-1}^{0} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = \int_{0}^{1} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_0^1 = -1 + \lim_{t\to+0} \frac{1}{t} = +\infty,$$

т.е. интеграл расходится.

№26. Чтобы выяснить, сходится ли данный интеграл 1-го рода, вычислим его значение. По формуле Ньютона-Лейбница получаем:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Поскольку интеграл существует и принимает конечное значение, то он по определению сходится.

№27. Чтобы выяснить, сходится ли данный интеграл 2-го рода, вычислим его значение. Для этого сделаем замену $t = x - 1$ и воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = -\int_{0}^{1} \frac{d(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}} = -\int_{-1}^{0} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{3\sqrt[3]{t^2}}{2}\Big|_{-1}^{0} = \frac{3}{2}.$$

9 СЕМИНАР: Функции нескольких переменных

Раздел: Математический анализ функций многих переменных.

I. Понятие m-мерного координатного (евклидова) пространства. ε-окрестность точки в m-мерном евклидовом пространстве в виде открытого шара. Последовательность точек и её предел. Ограниченные последовательности точек. [Теорема Больца́но-Вейерштра́сса].

II. Понятие функции нескольких переменных. Область задания и множество значений функции. Поверхность уровня. Предел функции $\lim\limits_{M\to A} f(M) = b$ по Гейне и по Коши. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

III. Непрерывность функции в точке по совокупности переменных и по каждой переменной в отдельности. Непрерывность на множестве. Понятие точек разрыва. Основные свойства непрерывных функций (об арифметических операциях над непрерывными в данной точке функциями, о непрерывности сложной функции, об устойчивости знака непрерывной в данной точке функции, о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса).

IV. Частные производные. Дифференцируемость. Дифференциал. Связь дифференцируемости с существованием всех частных производных 1-го порядка. Связь дифференцируемости с непрерывностью. Связь дифференцируемости с существованием касательной плоскости. Достаточные условия дифференцируемости в виде непрерывности частных производных 1-го порядка. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков (на примере 2-го порядка). [n-кратная дифференцируемость. Формула Тейлора].

Контроль знаний: проверка выполнения домашнего задания.

ЛИТЕРАТУРА.

[4]: Раздел VI (Функции нескольких переменных). Гл. 15 (Функции нескольких переменных), §15.1 (Основные понятия), §15.2 (Частные производные, градиент, дифференциал).

[5]: Гл. 11 (Понятие, предел и непрерывность функций нескольких

переменных). §1 (Понятие функции нескольких переменных и основные сведения). §2 (Предел и непрерывность функции двух переменных).

Гл. 12 (Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных). §1 (Частные производные). §3 (Дифференциал функции. Производная по направлению. Градиент). §4 (Частные производные и дифференциалы высших порядков).

9.1 Задачи на нахождение области определения функции

№1. Найдите область определения функции $z = \sqrt[8]{1 - x^2 + y}$. Изобразите область определения данной функции на плоскости Oxy.

Указание: по определению, корень чётной степени определён только для неотрицательных подкоренных выражений.

№2. Найдите область определения функции $z = \ln(x + y)$ и изобразите её на плоскости Oxy.

№3. Найдите область определения функции $z = \dfrac{1}{x + y}$.

№4. Найдите область определения функции $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

№5. Найдите область определения функции $z = \arcsin \dfrac{y}{x^2}$.

9.2 Задачи на нахождение линий (поверхностей) уровня

Линии уровня функции 2-х переменных $z = f(x, y)$ определяются уравнением $f(x, y) = C$, где C – произвольная константа из области значений функции. Линия уровня, соответствующая константе C, – это множество точек плоскости Oxy, в которых функция сохраняет постоянное значение, равное C. Для функций трёх переменных $u = f(x, y, z)$ поверхности уровня задаются уравнением $f(x, y, z) = C$, где C – произвольно.

№6. Найдите линии уровня функции $z = e^{x+y}$ (в явном виде $y = g(x, C)$). Изобразите несколько линий уровня на плоскости Oxy.

№7. Найдите линии уровня функции $z = \sqrt{y - x^2}$ и изобразите их на координатной плоскости Oxy.

№8. Постройте линии уровня функции $z = xy$.

№9. Постройте линии уровня функции $z = x/y$.

9.3 Задачи на вычисление пределов функций

Функция $z = f(x, y)$ называется *бесконечно малой в точке* (x_0, y_0), если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = 0$, и *бесконечно большой* в этой точке, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \infty$.

№10. Найдите предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(xy\sqrt{1+xy})$.

№11. Найдите предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$.

Указание: воспользуйтесь 1-м замечательным пределом.

№12. Найдите предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(xy\ln xy)$.

Указание: сделайте замену $t = xy$, перейдите под знаком предела к новой переменной и воспользуйтесь правилом Лопиталя.

№13. Найдите предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{x-y}{x^3-y^3}$.

Указание: чтобы раскрыть неопределённость $\frac{0}{0}$, разложите знаменатель на множители по соответствующей формуле сокращённого умножения.

№14. Вычислите предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 1}} x^2 y$.

№15. Вычислите предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

Указание: для раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$ следует умножить и разделить на y выражение под знаком предела и затем воспользоваться 1-м замечательным пределом.

№16. Вычислите предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

Указание: для раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$ воспользоваться приёмом одновременного умножения и деления дроби на сопряжённое выражение.

№17. Вычислите предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg}(2xy)}{x^2 y}$.

Указание: для раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$ следует воспользоваться соотношением эквивалентности: $\operatorname{tg} t \sim t$ при $t \to 0$ и заменить тангенс в числителе дроби на эквивалентную функцию.

№18. Приведите примеры бесконечно малой и бесконечно большой функций двух переменных.

9.4 Задачи на вычисление частных производных

При вычислении частной производной $f'_x(x, y)$ переменная y считается фиксированным числом и функция $f(x, y)$ дифференцируется по x как функция одной переменной x. Аналогично вычисляется частная производная $f'_y(x, y)$.

Частная производная $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ называется *смешанной частной производной* второго порядка. У функции двух переменных $u = f(x, y)$ существуют две частных производных 1-го порядка $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и четыре частных производных 2-го порядка $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, две последние из которых являются смешанными частными производными.

В общем случае значение смешанной частной производной зависит от порядка, в котором производилось дифференцирование. Но если функция дважды дифференцируема, то все смешанные частные производные второго порядка равны между собой.

№19. Найдите частные производные z'_x, z'_y функции

$$z = e^{x-y}(2x - 1).$$

№20. Найдите частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ функции

$$f(x, y) = \sin(x + \sqrt{y}).$$

№21. Найдите частные производные 1-го порядка функции $z = \frac{y}{x}$.

№22. Найдите частные производные 1-го порядка функции

$$z = \frac{x + y}{x - y}.$$

№23. Найдите частные производные 2-го порядка функции

$$z = \sin x \cos y.$$

№24. Найдите частные производные 3-го порядка функции

$$z = x^4 + 5y^3 + 3x - y.$$

Указание: различных частных производных 3-го порядка всего четыре: f'''_{x^3}, f'''_{x^2y}, f'''_{xy^2}, f'''_{y^3}, так как функция трижды дифференцируема и поэтому все смешанные производные равны между собой, например, $f'''_{x^2y} = f'''_{xyx} = f'''_{yx^2}$ и т.д.

9.5 Задачи на вычисление дифференциалов

Для дифференцируемых функций $z = f(x, y)$ выражение для дифференциала 1-го порядка в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$dz(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy,$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ – частные производные по x и y, вычисленные в этой точке.

Для дважды дифференцируемой функции $u = u(x, y)$ двух переменных имеем:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2,$$

а для функции $u = u(x, y, z)$ трёх переменных получим:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial z} \cdot dz\right)^2 u =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz.$$

№25. Найдите дифференциал 1-го порядка функции

$$z = e^{xy}(x + y).$$

№26. Найдите дифференциал 1-го порядка функции

$$z = \ln(1 + e^x + y^2).$$

№27. Найдите первый дифференциал функции $z = xy$.

№28. Найдите первый дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

№29. Найдите первый дифференциал функции $z = \sin(xy^2)$.

№30. Найдите d^2z, если $z = e^{3x-2y}$.

№31. Найдите d^2z там, где он существует, если $z = y\ln x$.

№32. Найдите полный дифференциал функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

9.6 Задачи на вычисление градиента

Градиентом функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ называется вектор частных производных

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0), ..., \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)\right\}.$$

Для функции двух переменных, соответственно, имеем:

$$\operatorname{grad} u(x_0, y_0) = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\right\}.$$

Модулем, или длиной, вектора $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$ называется число $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

№33. Найдите градиент функции $z = 7 - x^2 - y^2$ и его модуль в точке $M(1, 2)$.

№34. Найдите градиент функции $z = (x-y)^2$ и его модуль в точке $M(0,3)$.

№35. Найдите градиент функции $z = x^2y - \ln y$ в точке $M(1, \frac{1}{2})$.

№36. Найдите градиент функции $u = x^2+y^2-z^2$ в точке $M(1,-1,2)$.

9.7 Задачи на вычисление производной в заданном направлении

Пусть функция двух независимых переменных $u = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ плоскости Oxy и дифференцируема в точке M_0. Рассмотрим всевозможные лучи, выходящие из точки M_0 и лежащие в плоскости Oxy. Понятно, что таких лучей – бесконечно много. Выберем произвольный луч, определяющий некоторое направление. Пусть $\vec{e}$ – единичный вектор в выбранном направлении.[1] Возьмём на прямой, содержащей луч $\vec{e}$, произвольную точку M, отличную от точки M_0.

Производной функции $u = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ *в направлении вектора* $\vec{e}$ называется предел

$$\lim_{M\to M_0} \frac{f(M)-f(M_0)}{MM_0},$$

где величина отрезка MM_0 берётся со знаком «+», если точка M лежит в выбранном направлении от точки M_0, и берётся со знаком «-», если точка M лежит в противоположном выбранному направлении от точки M_0. Эту производную будем обозначать символом $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0)$.

№37. Найдите: 1) градиент функции $u = x^4+y^4-4x^2y^2$ в произвольной точке (x,y), а также в точке $(1,0)$;

2) производную этой функции вдоль единичного вектора, образующего с осью Ox угол $\alpha = 30°$, а с осью Oy – угол $\beta = 60°$.

№38. Найдите производную функции $z = x+y^2$ в точке $(0,1)$ в направлении биссектрисы 1-го координатного угла. Возрастает или убывает функция в этом направлении (в указанной точке)?

9.8 Задачи на непрерывность и нахождение точек разрыва

№39. Найдите точки разрыва функции $z = \dfrac{xy+5}{x^2+y^2}$.

№40. Найдите точки разрыва функции $z = \dfrac{5x}{y-x}$.

[1] Его координаты имеют вид $(\cos\alpha, \cos\beta)$, где числа $\cos\alpha, \cos\beta$ называют *направляющими косинусами*, причём $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, а α и β – углы, которые образует вектор $\vec{e}$, соответственно, с положительными направлениями осей Ox, Oy.

№41. Найдите точки разрыва функции $z = \dfrac{\sin x \sin y}{xy}$.

№42. Покажите, что из непрерывности функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $(0, 0)$ не следует существование частных производных функции в этой точке.

Указание: докажите, по определению, непрерывность функции (для этого необходимо убедиться в выполнении условия: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = f(0, 0)$). Затем, также по определению, вычислите частные производные как пределы:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x}, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y}.$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ:

9.1. Задачи на нахождение области определения функции.

№1. Область определения функции $z = \sqrt[8]{1 - x^2 + y}$ задаётся неравенством $1 - x^2 + y \geq 0$, т.е. $y \geq x^2 - 1$. На плоскости Oxy это неравенство определяет надграфик функции $y = x^2 - 1$, т.е. множество точек плоскости, лежащих на этой параболе или выше её.

№2. Область определения функции $z = \ln(x + y)$ задаётся неравенством $x + y > 0$, т.е. $y > -x$. Это полуплоскость, состоящая из точек плоскости, лежащих выше прямой $y = -x$.

№3. Область определения функции $z = \dfrac{1}{x + y}$ задаётся неравенством $y \neq x$. Это вся плоскость Oxy, из которой «удалена» прямая $y = x$.

№4. Область определения функции $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ задаётся неравенством $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, или $x^2 + y^2 \leq a^2$, которое определяет круг с центром в начале координат и радиусом $|a|$ (включая границу – саму окружность).

№5. Область определения функции $z = \arcsin \dfrac{y}{x^2}$ задаётся неравенством $-1 \leq \dfrac{y}{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 \leq y \leq x^2, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Это область, заключённая между двумя параболами (симметричными относительно оси абсцисс), из которой удалена вертикальная прямая $x = 0$ (ось ординат).

9.2. Задачи на нахождение линий (поверхностей) уровня.

№6. Линии уровня функции $z = e^{x+y}$ задаются уравнением $e^{x+y} = C$, $C > 0$. Выразим из этого уравнения переменную y, для этого прологарифмируем данное равенство по основанию e: $x + y = \ln C$, $y = -x + \ln C$. Так как $C > 0$ – произвольная константа, то $\ln C$ может принимать все действительные значения. Обозначим, для краткости, $C_1 = \ln C$, тогда $C_1 \in \mathbb{R}$. Таким образом, линии уровня данной функции представляют собой параллельные прямые вида $y = -x + C_1$, где каждому значению C_1 отвечает единственная прямая. Изобразите несколько линий уровня на плоскости Oxy самостоятельно, взяв, например, $C_1 = -1$, $C_1 = 0$, $C_1 = 1$.

№7. Линии уровня функции $z = \sqrt{y - x^2}$ задаются уравнением $\sqrt{y - x^2} = C$, $C \geq 0$. Найдём отсюда y. Для этого возведём в квадрат

$y - x^2 = C^2$, тогда $y = x^2 + C^2$. Обозначим, для краткости, $C_1 = C^2$, где $C_1 \geq 0$. Таким образом, линии уровня данной функции представляют собой семейство парабол вида $y = x^2 + C_1$, где каждому значению $C_1 \geq 0$ отвечает единственная парабола. Изобразите несколько линий уровня, взяв, например, $C_1 = 0$, $C_1 = 1$, $C_1 = 2$.

№8. Линии уровня функции $z = xy$ определяются уравнением $xy = C$, откуда при $C \neq 0$ получаем $y = \frac{C}{x}$. Значению $C = 0$ отвечают две прямые – оси координат. Итак, линии уровня данной функции – это семейство гипербол вида $y = \frac{C}{x}$, а также две оси координат. Для построения гипербол возьмите, например, $C_1 = 1$, $C_1 = 2$ и $C_1 = 3$.

№9. Линии уровня функции $z = x/y$ задаются уравнением $x/y = C$ $(y \neq 0)$, или $y = \frac{x}{C}$. Обозначив для краткости (при $C \neq 0$) $C_1 = \frac{1}{C}$, получим, что линии уровня данной функции – это пучок прямых вида $y = C_1 x$, $C_1 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, проходящих через начало координат (кроме осей координат, само начало координат выколото). Значению $C = 0$ соответствует $x = 0$ (ось ординат с выколотой точкой начала координат).

9.3. Задачи на вычисление пределов функций.

№10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(xy\sqrt{1+xy}) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(xy)\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{1+xy} = 0\cdot 1 = 0.$

№11. Обозначим $t = x + y$, тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$ (в силу 1-го замечательного предела).

№12. Положим $t = xy$, тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(xy\ln xy) = \lim\limits_{t\to 0}(t\ln t) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}$.

Применим правило Лопиталя: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(\ln t)'}{(\frac{1}{t})'} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -\lim\limits_{t\to 0} t = 0.$

№13. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x-y}{x^3-y^3} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x-y}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{1}{x^2+xy+y^2} = 1/3.$

№14. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 1}} x^2 y = 4$ (здесь нет неопределённости, поэтому просто подставим вместо x и y их предельные значения и получим ответ). Это можно сделать в силу непрерывности функции под знаком предела по совокупности своих переменных.

№15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{y\to 0} y = 1\cdot 0 = 0.$

№16.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$$

№17. Поскольку $\operatorname{tg}(2xy)\sim 2xy$ при $x\to 1, y\to 0$, то

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{tg}(2xy)}{x^2y}=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2y}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x}=2.$$

№18. Примеры: $z=(x-5)^3+3xy$ – бесконечно малоя при $x\to 5$, $y\to 0$ функция, так как $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to 0}}((x-5)^3+3xy)=0$. Та же функция $z=(x-5)^3+3xy$ является бесконечно большой при $x\to+\infty$, $y\to+\infty$, так как $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}((x-5)^3+3xy)=+\infty$.

9.4. Задачи на вычисление частных производных.

№19. Частные производные функции $z=e^{x-y}(2x-1)$ найдём по правилу «производная произведения двух функций»:

$$z'_x=(e^{x-y})'_x\cdot(2x-1)+e^{x-y}\cdot(2x-1)'_x=e^{x-y}\cdot(2x-1)+2e^{x-y}=$$

$$=e^{x-y}(2x+1);\quad z'_y=(2x-1)\cdot(e^{x-y})'_y=-(2x-1)e^{x-y}.$$

№20. Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ функции $f(x,y)=\sin(x+\sqrt{y})$:

$$f'_x(x,y)=\cos(x+\sqrt{y});$$

$$f'_y(x,y)=\cos(x+\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad y>0.$$

№21. Частные производные 1-го порядка функции $z=\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$:

$$z'_x=-\frac{y}{x^2},\quad z'_y=\frac{1}{x}.$$

№22. Частные производные 1-го порядка функции $z=\dfrac{x+y}{x-y}$ $(x\neq y)$:

$$z'_x=\frac{(x+y)'_x(x-y)-(x+y)(x-y)'_x}{(x-y)^2}=\frac{-2y}{(x-y)^2};$$

$$z'_y = \frac{(x+y)'_y(x-y) - (x+y)(x-y)'_y}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

№23. Найдём частные производные 2-го порядка для $z = \sin x \cos y$ (так как функция дважды дифференцируема, то смешанные производные 2-го порядка равны $z''_{xy} = z''_{yx}$):

$$z'_x = \cos x \cos y, \quad z'_y = -\sin x \sin y;$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = -\sin x \cos y, \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y = -\cos x \sin y,$$
$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = -\sin x \cos y.$$

№24. Найдём частные производные 3-го порядка функции $z = x^4 + 5y^3 + 3x - y$:

$$z'_x = 4x^3 + 3, \quad z'_y = 15y^2 - 1,$$
$$z''_{x^2} = 12x^2, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0, \quad z''_{y^2} = 30y,$$
$$z'''_{xxx} = 24x, \quad z'''_{x^2y} = z'''_{yx^2} = z'''_{xyx} = 0, \quad z'''_{xyy} = z'''_{y^2x} = z'''_{yxy} = 0, \quad z'''_{y^3} = 30.$$

9.5. Задачи на вычисление дифференциалов.

№25. Найдём дифференциал 1-го порядка функции $z = e^{xy}(x+y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}(x+y)) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}(x+y)) \cdot dy =$$
$$= (ye^{xy}(x+y) + e^{xy})dx + (xe^{xy}(x+y) + e^{xy})dy.$$

№26. Найдём дифференциал 1-го порядка функции $z = \ln(1+e^x+y^2)$:

$$dz = \frac{e^x}{1+e^x+y^2}dx + \frac{2y}{1+e^x+y^2}dy = \frac{e^x dx + 2y dy}{1+e^x+y^2}.$$

№27. Воспользуемся для нахождения dz правилом «дифференциал произведения двух функций»:

$$dz = d(xy) = ydx + xdy.$$

№28. Найдём первый дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$:

$$dz = \frac{2xdx}{2\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{2ydy}{2\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2-y^2}} \quad (|x| > |y|).$$

№29. Найдём первый дифференциал функции $z = \sin(xy^2)$:

$$dz = \cos(xy^2) \cdot y^2 dx + \cos(xy^2) \cdot 2xydy = \cos(xy^2)(y^2dx + 2xydy).$$

№30. Найдём d^2z, если $z = e^{3x-2y}$:

$$dz = 3e^{3x-2y}dx - 2e^{3x-2y}dy = e^{3x-2y}(3dx - 2dy).$$

№31. Найдём d^2z, если $z = y \ln x$ $(x > 0)$. Имеем $z'_x = \frac{y}{x}$, $z'_y = \ln x$, $z''_{xx} = -\frac{y}{x^2}$, $z''_{xy} = \frac{1}{x}$, $z''_{yy} = 0$, тогда

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 = -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy + 0 \cdot dy^2 =$$

$$= -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy.$$

№32. Найдём полный дифференциал функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz =$$

$$= \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

9.6. Задачи на вычисление градиента.

№33. Градиент функции $z = 7 - x^2 - y^2$ есть вектор частных производных $\nabla z(x, y) = \{z'_x, z'_y\} = \{-2x, -2y\}\Big|_M = \{-2, -4\}$. Тогда его модуль в точке $M(1, 2)$ равен $|\nabla z(1, 2)| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$.

№34. Градиент функции $z = (x - y)^2$ есть вектор

$$\nabla z(x, y) = \{2(x - y), 2(y - x)\}\Big|_{M(0,3)} = \{-6, 6\},$$

тогда его модуль в точке M равен $|\nabla z(0, 3)| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$.

№35. Градиент функции $z = x^2y - \ln y$ есть вектор частных производных $\nabla z(x, y) = \{2xy, x^2 - \frac{1}{y}\}\Big|_{M(1,\frac{1}{2})} = \{1, -1\}$.

№36. Найдём градиент функции $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точке $M(1, -1, 2)$:

$$\nabla u(x, y, z) = \{u'_x, u'_y, u'_z\} = \{2x, 2y, -2z\}\Big|_{M(1,-1,2)} = \{2, -2, -4\}.$$

9.7. Задачи на вычисление производной в заданном направлении.

№37. 1) Найдём частные производные сначала в произвольной точке (x, y), а затем в точке $(1, 0)$:

$$u'_x = (4x^3 - 8xy^2)\big|_{(1,0)} = 4, \quad u'_y = (4y^3 - 8x^2y)\big|_{(1,0)} = 0.$$

Тогда градиент функции в точке (x, y) есть вектор $\operatorname{grad} u(x, y) = \{4x^3 - 8xy^2, 4y^3 - 8x^2y\}$, причём $\operatorname{grad} u(1, 0) = \{4, 0\}$.

2) Воспользуемся формулой для вычисления производной в заданном направлении:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(1, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0)\cos\beta = 4 \cdot \cos 30^\circ + 0 \cdot \cos 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

№38. Воспользуемся формулой для вычисления производной в точке (x_0, y_0) по направлению единичного вектора $\vec{e}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \cos\beta, \tag{1}$$

где направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta$ являются координатами единичного (единичной длины) вектора $\vec{e} = \vec{a}/|\vec{a}|$, где вектор $\vec{a}$ – произвольный вектор, указывающий направление дифференцирования.

1) Найдем частные производные в точке $(0, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1\Big|_{(0,1)} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\Big|_{(0,1)} = 2.$$

2) Заметим, что, например, вектор $\vec{a}\{1, 1\}$ параллелен биссектрисе 1-го координатного угла, но $\vec{a}$ не может выступать в качестве вектора $\vec{e}$, так как имеет не единичную длину. Отнормируем этот вектор $\vec{a}$, разделив его на его длину $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, и получим единичный вектор $\vec{e}$ с таким же направлением, как у вектора $\vec{a}$, но с длиной, равной единице:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Тогда координаты полученного вектора $\vec{e}$ и будут направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{2}, \quad \cos\beta = 1/\sqrt{2}.$$

Подставляя в формулу (1), окончательно находим производную в направлении вектора $\vec{e}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \cdot \cos\beta = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Так как производная оказалась положительной, то функция возрастает в данной точке в указанном направлении.

9.8. Задачи на непрерывность и нахождение точек разрыва.

№39. Функция $z = \dfrac{xy+5}{x^2+y^2}$ является непрерывной во всех точках (x,y), кроме точки, в которой знаменатель равен нулю: $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=0, y=0$. Точка $(0,0)$ является единственной точкой разрыва этой функции.

№40. Чтобы найти точки разрыва функции $z = \dfrac{5x}{y-x}$, приравняем знаменатель к нулю: $y - x = 0$. То есть точки разрыва (их бесконечно много!) заполняют собой прямую $y = x$.

№41. Чтобы найти точки разрыва функции $z = \dfrac{\sin x \sin y}{xy}$, приравняем знаменатель к нулю: $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $y = 0$. Таким образом, точки разрыва лежат на координатных осях.

№42. Покажите, что из непрерывности функции $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ в точке $(0,0)$ не следует существование частных производных функции в этой точке.

1) Докажем, по определению, непрерывность функции. Для этого убедимся в выполнении условия непрерывности: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$. В самом деле, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$, т.е. функция непрерывна в точке $(0,0)$.

2) Вычислим частную производную $f'_x(x,y)$ в точке $(0,0)$ по определению, т.е. как пределы:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{ если } \Delta x > 0, \\ -1, \text{ если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Так как значение частной производной зависит от знака приращения аргумента Δx, то это означает, что $f'_x(0,0)$ не существует. В силу симметричной зависимости функции от своих переменных, аналогично доказывается несуществование частной производной по переменной y.

http://www.lib.sfu.ca/help/cite-write/citation-style-guides/apa

10 СЕМИНАР: Локальные экстремумы. Простейшие дифференциальные уравнения

Раздел: Математический анализ функций многих переменных. Локальные экстремумы. Дифференциальные уравнения

I. Понятие локального (безусловного) экстремума функции многих переменных. Определение локального максимума и минимума, локального экстремума. Необходимое условие локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума (оценка знака второго дифференциала, оценка знака полного приращения функции).

II. Дифференциальные уравнения. Понятие ДУ. Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Основные понятия ОДУ: порядок уравнения, решение уравнения, интегральная кривая. Общее и частные решения.

Уравнения 1-го порядка, разрешённые относительно производной. Задача Коши. Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.

ОДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными и метод их решения. ОДУ 2-го порядка, заменой сводящиеся к ОДУ 1-го порядка и двукратному интегрированию. Задача Коши для уравнений 2-го порядка. Нахождение дифференциального уравнения по известному виду решений.

Контроль знаний: проверка выполнения домашнего задания.

На дом: подготовка к самостоятельной работе по темам «Неопределённый и определённый интегралы. Функции многих переменных. Дифференциальные уравнения».

ЛИТЕРАТУРА.

[4]: Раздел VI (Функции нескольких переменных). Гл. 15 (Функции нескольких переменных), §15.3 (Экстремум функции нескольких переменных. [Условный экстремум]).

[5]: Гл. 12 (Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных). §6 (Экстремумы функций двух переменных).

Гл. 14 (Дифференциальные уравнения). §1 (Дифференциальные уравнения 1-го порядка). п.1 (Основные понятия). п.2 (Уравнения с разделяющимися переменными). §3 (Примеры дифференциальных уравнений разных типов).

10.1 Задачи на локальные экстремумы

1. Определения. Будем говорить, что функция m переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ *локальный максимум* (соответственно, *локальный минимум*), если найдётся окрестность этой точки такая, что для любой точки M из указанной окрестности верно неравенство: $f(M) \le f(M_0)$ (соответственно, $f(M) \ge f(M_0)$). Если последние неравенства строгие (для всех M из окрестности, отличных от M_0), то получим определения точки *строгого локального максимума* (соответственно, *строгого локального минимума*).

Будем говорить, что функция m переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ *локальный экстремум*, если она имеет в этой точке либо локальный минимум, либо локальный максимум. *Локальным экстремумом* называется значение функции в точке локального экстремума.

2. Как найти точки возможного экстремума?

Теорема 1 (*необходимое условие локального экстремума, или многомерный аналог теоремы Ферма́*). Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ локальный экстремум. Тогда если в этой точке существуют конечные частные производные первого порядка по всем переменным, то все эти частные производные равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} f'_{x_1}(M_0) = 0, \\ f'_{x_2}(M_0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_{x_m}(M_0) = 0. \end{cases}$$

Следствие. Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ и имеет в этой точке локальный экстремум, то её первый дифференциал в этой точке равен нулю:

$$du(M_0) = f'_{x_1}(M_0)dx_1 + ... + f'_{x_m}(M_0)dx_m = 0.$$

Точки M_0, в которых все частные производные одновременно обращаются в нуль, называются *стационарными точками* (вместе с точками, в которых частные производные не существуют, их относят к *точкам возможного экстремума*).

Итак, чтобы найти точки возможного экстремума, надо приравнять все частные производные 1-го порядка к нулю и решить эту систему.

Подчеркнём, что обращение в нуль в точке M_0 всех частных производных первого порядка является *только необходимым* и не является достаточным условием локального экстремума дифференцируемой в этой точке M_0 функции. Например, функция $u = xy$ дифференцируема в точке $(0,0)$, имеет в этой точке равные нулю частные производные первого порядка $f'_x = y$, $f'_y = x$, но не имеет в точке $(0,0)$ никакого локального экстремума, так как эта функция равна нулю в самой точке $(0,0)$, а в сколь угодно малой окрестности этой точки принимает как положительные, так и отрицательные значения.

3. Как проверить, будет ли экстремум в найденных точках возможного экстремума, и если да, то какой именно (максимум или минимум)?

Для того чтобы выяснить, есть ли в данной стационарной точке локальный экстремум, следует проверить выполнение *достаточных условий* локального экстремума.

1-й способ. Надо найти второй дифференциал

$$d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2$$

и определить его знак в точке возможного экстремума. Результат даёт следующая теорема.

Теорема 2 (*достаточные условия локального экстремума*). Пусть M_0 – стационарная точка функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, дифференцируемой в окрестности точки M_0 и дважды дифференцируемой в самой точке M_0. Тогда:

1) если $d^2f(M_0) > 0$ (при одновременно не обращающихся в нуль дифференциалах dx_i, $i = \overline{1,m}$), то в точке M_0 функция имеет локальный минимум;

2) если $d^2f(M_0) < 0$ (при условии $\sum\limits_{i=1}^{m} |dx_i| \neq 0$), то в точке M_0 функция имеет локальный максимум;

3) если $d^2f(M_0)$ не сохраняет постоянного знака (является знакопеременным), то локального экстремума в точке M_0 нет.

2-й способ. В некоторых случаях можно воспользоваться определением локального экстремума и исследовать знак полного приращения функции в каждой из точек возможного экстремума:

$$\triangle f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) = f(x_1^0+\triangle x_1, x_2^0+\triangle x_2, ..., x_m^0+\triangle x_m) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0).$$

1) Если это приращение $\triangle f(M_0) < 0$ $(\triangle f(M_0) \le 0)$ при любых одновременно неравных нулю частных приращениях аргументов $(\triangle x_1^2 + ... + \triangle x_m^2 \neq 0)$, то в точке M_0 функция имеет строгий (нестрогий) локальный максимум.

2) Если приращение $\triangle f(M_0)$ в достаточно малой окрестности точки M_0 сохраняет положительный (неотрицательный) знак, то в точке M_0 имеется строгий (нестрогий) локальный минимум.

3) Если же приращение функции может быть как положительным, так и отрицательным (не сохраняет определённого знака в малой окрестности точки M_0), то экстремума в этой точке нет.

Пример 1. Исследовать на локальные экстремумы функцию $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$.

Решение. 1) Локальный экстремум, согласно необходимому условию, возможен лишь в точках, где все частные производные 1-го порядка одновременно обращаются в нуль. Найдём эти точки:

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = 0, \\ 2(y-1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

2) Проверим, будет ли в найденной единственной стационарной точке экстремум, и если да, то какой.

1-й способ: оценим в стационарной точке знак второго дифференциала. Вычислим все частные производные 2-го порядка $f''_{x^2}(x, y) = 2$, $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0$, $f''_{y^2}(x, y) = 2$ и воспользуемся формулой для второго дифференциала:

$$d^2 f(x, y) = f''_{x^2}(x, y)dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{y^2}(x, y)dy^2 = 2dx^2 + 2 \cdot 0dxdy + 2dy^2 \quad \Rightarrow$$

$$d^2 f(0, 1) = 2dx^2 + 2dy^2 > 0 \quad \text{при } dx^2 + dy^2 \neq 0.$$

Следовательно, в точке $(0, 1)$ функция имеет локальный минимум, равный $f(0, 1) = 0$.

2-й способ: выпишем в стационарной точке полное приращение функции:

$$\triangle f(0, 1) = f(0 + \triangle x, 1 + \triangle y) - f(0, 1) = \triangle x^2 + \triangle y^2 > 0$$

при одновременно неравных нулю приращениях аргументов $\triangle x$ и $\triangle y$.

Ответ: в точке $(0, 1)$ функция имеет локальный минимум, равный $f(0, 1) = 0$.

Пример 2. Исследовать на локальные экстремумы функцию $f(x, y) = x^2 - (y-1)^2$.

Решение. 1) Запишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = 0, \\ -2(y-1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

2) Проверим достаточные условия экстремума в найденной точке возможного экстремума.

1-й способ. Найдём второй дифференциал в произвольной точке

$$d^2 f(x, y) = f''_{x^2}(x, y)dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{y^2}(x, y)dy^2 = 2dx^2 - 2dy^2$$

и затем определим его знак в точке $(0,1)$: $d^2f(0,1) = 2dx^2 - 2dy^2$. Заметим, далее, что если взять $dx \neq 0$, $dy = 0$, то получим $d^2f(0,1) > 0$, а если выбрать $dx = 0$, $dy \neq 0$, то получим $d^2f(0,1) < 0$. То есть второй дифференциал не сохраняет определённого знака, а это доказывает, что в единственной стационарной точке $(0,1)$ экстремума нет.

2-й способ. Выпишем полное приращение функции в точке $(0,1)$:

$$\triangle f(0,1) = f(0 + \triangle x, 1 + \triangle y) - f(0,1) = \triangle x^2 - \triangle y^2 > 0$$

(при одновременно неравных нулю приращениях аргументов $\triangle x$ и $\triangle y$). Заметим, что если взять $\triangle x \neq 0$, $\triangle y = 0$, то получим $\triangle f(0,1) > 0$, а если выбрать $\triangle x = 0$, $\triangle y \neq 0$, то получим $\triangle f(0,1) < 0$. То есть приращение функции в исследуемой стационарной точке не сохраняет определённого знака. Это доказывает, что в данной точке экстремума нет.

ЗАДАЧИ.

№ 1. Найдите локальные экстремумы функции

$$z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y.$$

Указание: воспользоваться алгебраическим неравенством о неотрицательности неполного квадрата суммы, а именно: $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$, причем это неравенство обращается в равенство только в случае $a = b = 0$.

№ 2. Найдите локальные экстремумы функции

$$z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y.$$

№ 3. Докажите, что функция

$$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$$

имеет единственный локальный экстремум и определить его вид. Чему равен этот экстремум?

№ 4. Докажите, что функция

$$z = 2xy - 4x - 2y$$

не имеет локальных экстремумов. Решить задачу двумя способами, показав, что в точке возможного экстремума: а) 2-й дифференциал функции не сохраняет знака; б) приращение функции не сохраняет знака.

№ 5. Найдите локальные экстремумы функции

$$z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2.$$

№ 6. Найдите локальные экстремумы функций

$$\text{а) } z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad \text{б) } z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

10.2 Решение дифференциальных уравнений

Анекдот (быль). Лет 20—30 назад в Екатеринбурге (тогда — Свердловск) местная газета опубликовала статью о работавшем в этом городе математике - академике Н.Н. Красовском. Помимо общих слов, какой он замечательный, там была и конкретика, о которой Николай Николаевич поведал своим сотрудникам. Вот как они пересказали слова Красовского.
«— Приходит корреспондент одной из местных газет ко мне в кабинет. На доске в кабинете написаны уравнения. Корреспондент спрашивает: «Чем Вы занимаетесь?» Я отвечаю: мы занимаемся изучением обыкновенных дифференциальных уравнений. На другой день в газете появилась статья, в которой, в частности, говорилось: «На доске были написаны сложнейшие уравнения, которые академик по своей скромности с легкостью называет обыкновенными».

Рассмотрим несколько примеров решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 1. Решить линейное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $xdx + ydy = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $ydy = -xdx$ и возьмём неопределённый интеграл от обеих частей этого равенства:

$$\int ydy = -\int xdx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = C^2.$$

Мы видим, что интегральные кривые данного уравнения представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в точке начала координат и радиусом C.

Пример 2. Решить (найти общее решение) дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' + y^2 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = -y^2$, или $-\frac{dy}{y^2} = dx$. Возьмём неопределённый интеграл от обеих частей этого равенства:

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x + C},$$

где C – произвольная постоянная.

Пример 3. Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy$ с начальным условием $y(0) = 1$ (задачу Коши).

Решение. Перепишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = xy(y + 2)$.

1) Пусть $y(y + 2) \not\equiv 0$, тогда

$$\frac{dy}{y(y + 2)} = xdx.$$

Возьмём неопределённый интеграл:

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = \int xdx \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\int \frac{(y+2) - y}{y(y+2)} dy = \int xdx \;\Leftrightarrow\; \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right) dy = \int 2xdx$$

$$\ln|y| - \ln|y+2| = x^2 + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + C_1 \ (C_1 \in \mathbb{R}).$$

Далее удобно представить произвольную константу C_1 в виде $\ln C$ $(C > 0)$:

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + \ln C \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{y+2}\right| - \ln C = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{C(y+2)}\right| = x^2.$$

Потенцируя[1] по основанию e, получим

$$\left|\frac{y}{y+2}\right| = Ce^{x^2} \ (C > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{y+2} = Ce^{x^2} \ (C \in \mathbb{R}),$$

откуда находим общее решение

$$y = \frac{2Ce^{x^2}}{1 - Ce^{x^2}}.$$

Учтём начальное условие: $1 = \dfrac{2C}{1-C}$, откуда $C = \dfrac{1}{3}$. Подставляя в общее решение, получаем окончательно $y = \dfrac{2e^{x^2}}{3 - e^{x^2}}$.

2) Проверкой убеждаемся, что функции $y \equiv 0$ и $y \equiv -2$ также являются решениями данного ОДУ (не получаемыми из общего решения), однако они не удовлетворяют начальному условию.

Замечание. Такой же ответ получается при решении задачи другим способом: вычислением определённого интеграла

$$\int_1^y \frac{dy}{y(y+2)} = \int_0^x x\,dx. \quad \text{Ответ: } y = \frac{2e^{x^2}}{3 - e^{x^2}}.$$

ЗАДАЧИ.

№ 7. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = 3\operatorname{tg} x$ обыкновенному дифференциальному уравнению $3y'' = 2yy'$?

№ 8. Докажите, что функция $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ является решением дифференциального уравнения в частных производных:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

№ 9. Проверьте, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = \ln(x - 2y)$.

№ 10. Покажите, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = e^x \cos y$.

[1] Пропотенцировать равенство $A = B$ по основанию e означает перейти к эквивалентному равенству $e^A = e^B$.

№ 11. Решите ОДУ 1-го порядка

$$x(1+y^2)+y(1+x^2)\frac{dy}{dx}=0.$$

№ 12. Найдите решение уравнения $e^x dx-(1+e^x)ydy=0$, удовлетворяющее условию $y(0)=1$. Решить задачу двумя способами.

№ 13. Найдите частное решение уравнения $x^2y'+y^2=0$, удовлетворяющее условию $y_0=1$ при $x_0=-1$.

№ 14. Решите уравнение $y'=\sqrt{1-y^2}$.

№ 15. Докажите, что если $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1.$$

№ 16. Докажите, что функция $z=e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Пример (к следующей задаче). Найти общий интеграл дифференциального уравнения второго порядка $y''=\dfrac{y'}{x}$.

Решение. Полагая $y'=p$, $y''=\dfrac{dp}{dx}$, получим уравнение

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}\quad\Leftrightarrow\quad\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x}\quad\Leftrightarrow\quad\ln|p|=\ln|x|+\ln C_1$$

$$\ln|p|=\ln(C_1|x|)\quad\Leftrightarrow\quad p(x)=C_1x\quad(C_1\in\mathbb{R}).$$

Заменим $p(x)$ на $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=C_1x\quad\Leftrightarrow\quad dy=C_1xdx\quad\Leftrightarrow\quad\int dy=C_1\int xdx\quad\Leftrightarrow\quad y=C_1\frac{x^2}{2}+C_2.$$

Это и есть искомый общий интеграл, описывающий все решения данного дифференциального уравнения.

№ 17. Решите уравнение 2-го порядка

$$y''=x,$$

полагая $y'=p$ и сводя к уравнению 1-го порядка. Решить задачу Коши с тем же уравнением и начальными условиями $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

№ 18. Составьте дифференциальное уравнение семейства кривых

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

№ 19. Составьте дифференциальное уравнение семейства окружностей

$$(x - C)^2 + y^2 = 1.$$

№ 20. Решите дифференциальное уравнение $y' = -\dfrac{y}{x}$ и изобразите на плоскости Oxy интегральные кривые $y = \varphi(x, C)$, соответствующие различным значениям постоянной C (т.н. *фазовый портрет траекторий*).

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ:

10.1. Задачи на локальные экстремумы.

№1. Решение. 1) Найдем точки возможного экстремума функции $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ 2y + x - 5 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Таким образом, единственная точка, в которой может быть экстремум – это точка $M(1,2)$.

2) Проверим достаточные условия экстремума в найденной точке. Вычислим для этого второй дифференциал функции (сначала в произвольной точке (x,y), а затем – в точке $M(1,2)$). Поскольку $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = 1$, $z''_{yy} = 2$, то

$$d^2z\Big|_{(x,y)} = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2 = 2dx^2 + 2dxdy + 2dy^2.$$

Итак, $d^2z\Big|_{(1,2)} = 2(dx^2 + dxdy + dy^2) > 0$ при одновременно не обращающихся в нуль дифференциалах dx и dy. Таким образом, в точке $(1,2)$ функция имеет локальный минимум. Подставляя в функцию координаты точки, находим $z_{\min} = -7$.

Ответ: $z_{\min} = z(1,2) = -7$.

№2. 1) Найдем точки возможного экстремума функции $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + y - 2 = 0, \\ 2y + x - 6 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{2}{5}, \\ y = \frac{14}{5}. \end{cases}$$

Итак, экстремум возможен лишь в точке $M(\frac{2}{5}, \frac{14}{5})$.

2) Проверим теперь выполнение достаточных условий экстремума в найденной точке M. Вычислим для этого второй дифференциал функции в этой точке. Поскольку в произвольной точке $z''_{xx} = -2$, $z''_{xy} = 1$, $z''_{yy} = 2$, то

$$d^2z\Big|_{(x,y)} = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2 = -2dx^2 + 2dxdy + 2dy^2.$$

Поэтому и в точке $M(\frac{2}{5}, \frac{14}{5})$ имеем

$$d^2z\Big|_{(\frac{2}{5}, \frac{14}{5})} = -2dx^2 + 2dxdy + 2dy^2.$$

Заметим, что если $dy = dx (\neq 0)$, то $d^2z(M) = 2dx^2 > 0$, а если взять $dy = -dx (\neq 0)$, то $d^2z(M) = -2dx^2 < 0$. Таким образом, второй дифференциал не сохраняет определённого знака в данной точке, поэтому в этой точке экстремума нет.

Ответ: функция не имеет локальных экстремумов.

№3. 1) Найдем точки возможного экстремума функции $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$. В этих точках должно выполняться необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 9 = 0, \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Итак, экстремум возможен лишь в точке $M(-4, 1)$.

2) Проверим теперь выполнение достаточных условий экстремума в найденной точке M. Вычислим для этого второй дифференциал функции в этой точке. Поскольку в произвольной точке $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -1$, $z''_{yy} = 2$, то

$$d^2z\Big|_{(x,y)} = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2 = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2.$$

Поэтому и в точке $M(-4, 1)$ имеем

$$d^2z\Big|_{(-4,1)} = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2 = 2(dx^2 - dxdy + dy^2).$$

Так как неполный квадрат разности (в скобках) всегда положителен при dx и dy, одновременно не обращающихся в нуль, то второй дифференциал положителен в исследуемой точке, а значит, функция имеет в этой точке локальный минимум. Чтобы найти его значение, подставим в функцию координаты точки $M(-4, 1)$ и получим, что $z_{\min} = z(-4, 1) = -1$.

Ответ: функция имеет единственный локальный минимум в точке $M(-4, 1)$, причём $z_{\min} = z(-4, 1) = -1$.

№4. 1) Найдем точки возможного экстремума функции $z = 2xy - 4x - 2y$. В этих точках должно выполняться необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 4 = 0, \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Итак, экстремум возможен лишь в точке $M(1, 2)$.

2) Проверим теперь выполнение достаточных условий экстремума в найденной точке M.

1-й способ. Вычислим для этого второй дифференциал функции в этой точке. Поскольку в произвольной точке $z''_{xx} = 0$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2$, $z''_{yy} = 0$, то

$$d^2 z\Big|_{(x,y)} = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2 = 4dxdy.$$

Заметим, что если $dy = dx(\neq 0)$, то $d^2z(M) = 4dx^2 > 0$, а если взять $dy = -dx(\neq 0)$, то $d^2z(M) = -4dx^2 < 0$. Таким образом, второй дифференциал не сохраняет определённого знака в данной точке, поэтому в этой точке экстремума нет.

2-й способ. Найдём приращение функции в точке $M(1,2)$:

$$\Delta z(1,2) = z(1+\Delta x, 2+\Delta y) - z(1,2) =$$

$$= 2(1+\Delta x)(2+\Delta y) - 4(1+\Delta x) - 2(2+\Delta y) - z(1,2) = 2\Delta x \Delta y.$$

Если взять $\Delta y = \Delta x$ $(\neq 0)$, то $\Delta z(1,2) = 2\Delta x^2 > 0$, а если взять $\Delta y = -\Delta x$ $(\neq 0)$, то $\Delta z(1,2) = -2\Delta x^2 < 0$. Таким образом, приращение функции в точке не сохраняет определённого знака в окрестности этой точки, это противоречит определению локального экстремума. Поэтому в этой точке экстремума нет.

Ответ: функция не имеет локальных экстремумов.

№5. 1) Найдем точки возможного экстремума функции $z = 3x+6y-x^2-xy-y^2$. В этих точках должно выполняться необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3-2x-y = 0, \\ 6-x-2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 3. \end{cases}$$

Итак, экстремум возможен лишь в точке $M(0,3)$.

2) Проверим теперь выполнение достаточных условий экстремума в найденной точке M. Вычислим для этого второй дифференциал функции в этой точке. Поскольку в произвольной точке $z''_{xx} = -2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -1$, $z''_{yy} = -2$, то

$$d^2 z\Big|_{(x,y)} = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2 = -2dx^2 - 2dxdy - 2dy^2 =$$

$$= -2(dx^2 + dxdy + dy^2) < 0.$$

Так как неполный квадрат суммы (в скобках) всегда положителен при dx и dy, одновременно не обращающихся в нуль, то второй дифференциал отрицателен в исследуемой точке, а значит, функция имеет в этой точке локальный максимум. Чтобы найти его значение, подставим в функцию координаты точки $M(0,3)$ и получим, что $z_{\max} = z(0,3) = 9$.

Ответ: функция имеет единственный локальный максимум в точке $M(0,3)$, равный $z_{\max} = 9$.

№6. а) Найдем точки возможного экстремума функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$. В этих точках должно выполняться необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Итак, экстремум возможен в двух точках $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума в найденных точках. Вычислим для этого второй дифференциал функции. Поскольку в произвольной точке $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -3$, $z''_{yy} = 6y$, то

$$d^2z\Big|_{(x,y)} = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2 = 6xdx^2 - 6dxdy + 6ydy^2 =$$

$$= 6(xdx^2 - dxdy + ydy^2).$$

Тогда $d^2z\Big|_{(0,0)} = -6dxdy$ и не имеет определенного знака, поэтому данная точка не является экстремальной. В то же время $d^2z\Big|_{(1,1)} = 6(dx^2 - dxdy + dy^2) > 0$, т.е. в этой точке функция имеет локальный минимум, равный -1.

Ответ: $z_{\min} = z(1,1) = -1$.

б) Найдем точки возможного экстремума функции $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. В этих точках должно выполняться необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

Единственная точка, где могут не существовать частные производные – это точка $(0,0)$. Проверим, будет ли в этой точке локальный экстремум. Исследуем знак приращения функции в этой точке:

$$\Delta z(0,0) = z(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - z(0,0) =$$

$$= 1 - \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} - 1 = -\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < 0.$$

Следовательно, в этой точке функция имеет (строгий) локальный максимум, равный $z_{\max} = 1$.

Ответ: $z_{\max} = z(0,0) = 1$.

10.2. Задачи на решение дифференциальных уравнений.

№7. Вычислим производные 1-го и 2-го порядков:

$$y' = \frac{3}{\cos^2 x} \;\Rightarrow\; y'' = 3 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{\cos^3 x} \cdot (-\sin x) =$$

$$= \frac{6 \sin x}{\cos^3 x}.$$

Подставим функцию $y = 3 \operatorname{tg} x$ в дифференциальное уравнение $3y'' = 2yy'$ и получим:

$$3y'' = 2yy' \;\Leftrightarrow\; 3 \cdot \frac{6 \sin x}{\cos^3 x} = 2 \cdot 3 \operatorname{tg} x \cdot \frac{3}{\cos^2 x},$$

что верно.

Ответ: функция является решением дифференциального уравнения.

№8. Докажем, что функция $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ является решением дифференциального уравнения в частных производных:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

Для этого найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Вычислим

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + y\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{1}{2},$$

т.е. функция удовлетворяет данному ДУ.

№9. Покажем, что функция $z = \ln(x-2y)$ удовлетворяет уравнению в частных производных: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. (Можно сказать иначе: смешанные частные производные второго порядка у этой функции равны). Найдём производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x-2y} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x-2y}\right) =$$

$$= -\frac{1}{(x-2y)^2} \cdot (-2) = \frac{2}{(x-2y)^2};$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2}{x-2y} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2}{x-2y}\right) =$$

$$= -2 \cdot \left(-\frac{1}{(x-2y)^2}\right) = \frac{2}{(x-2y)^2},$$

т.е. частные производные равны, что и требовалось показать.

№10. Покажем, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ для функции $z = e^x \cos y$. Найдём для этого частные производные сначала первого, а затем второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) = e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-e^x \sin y\right) = -e^x \cos y.$$

Поэтому $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, что и требовалось доказать.

№11. Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

и разделим на $(1+x^2)(1+y^2)$:

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0.$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+1)}{1+y^2} = C_1$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln C,$$

отсюда $(1+x^2)(1+y^2)=C$, $C>0$, – общий интеграл уравнения.

Ответ: $(1+x^2)(1+y^2)=C$, $C>0$.

№12. Решение. *1-й способ.* Перепишем уравнение в виде $\dfrac{e^x}{1+e^x}dx=ydy$ и проинтегрируем

$$\int\frac{e^x dx}{1+e^x}=\int ydy \quad\Leftrightarrow\quad \int\frac{d(e^x)}{1+e^x}=\int ydy \quad\Leftrightarrow\quad \int\frac{d(1+e^x)}{1+e^x}=\int ydy$$

$$\ln(1+e^x)+\ln C=\frac{y^2}{2}, \quad\Leftrightarrow\quad \ln(C(1+e^x))=\frac{y^2}{2} \quad\Leftrightarrow\quad y^2=2\ln(C(1+e^x)).$$

Найдём C, подставив начальные условия:

$$1^2=2\ln(C(1+e^0)) \quad\Leftrightarrow\quad C=\frac{\sqrt{e}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad y^2=\ln\left(e\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2\right).$$

2-й способ. Приведя уравнение к виду $\dfrac{e^x}{1+e^x}dx=ydy$, возьмём определённый интеграл

$$\int_0^x\frac{e^x dx}{1+e^x}=\int_1^y ydy \quad\Leftrightarrow\quad \int_0^x\frac{d(e^x)}{1+e^x}=\int_1^y ydy \quad\Leftrightarrow\quad \int_0^x\frac{d(1+e^x)}{1+e^x}=\int_1^y ydy$$

$$\ln(1+e^x)\Big|_0^x=\frac{y^2}{2}\Big|_1^y, \quad\Leftrightarrow\quad \ln(1+e^x)-\ln 2=\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad y^2=\ln\left(e\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2\right).$$

№13. Решение. Имеем: $\dfrac{dy}{dx}\cdot x^2=-y^2$.

а) Пусть $x\neq 0$, $y\neq 0$, тогда

$$\frac{dy}{y^2}=-\frac{dx}{x^2} \;\Leftrightarrow\; \int_1^y\frac{dy}{y^2}=-\int_{-1}^x\frac{dx}{x^2} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{y}\Big|_1^y=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^x \;\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{y}+1=-\frac{1}{x}-1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{y}=\frac{1}{x}+2 \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{x}{1+2x}.$$

б) Функция $y\equiv 0$, как показывает подстановка в уравнение, также является его решением, но оно не удовлетворяет начальному условию.

Ответ: $y=\dfrac{x}{1+2x}$ $(x\neq 0)$.

№14. Решение. ОДЗ: $-1\leq y\leq 1$.

а) Пусть $y \neq \pm 1$, тогда $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx$, или $\arcsin y = x + C$. Мы нашли общий интеграл, найдём из него общее решение. Заметим, что так как $\arcsin y$ принимает значения из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то и $x + C \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Применяя к последнему равенству функцию синус и учитывая, что синус и арксинус – взаимно обратные функции и поэтому $\sin(\arcsin y) = y$, получим $y = \sin(x + C)$, где $x + C \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Подстановкой в уравнение убеждаемся, что функции $y \equiv 1$ и $y \equiv -1$ также являются его решениями.

Ответ: $y = \sin(x + C)$, где $x + C \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $y \equiv \pm 1$, где $x \in \mathbb{R}$.

№15. Покажем, что если $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Возводя в квадрат и складывая, получим требуемое.

№16. Докажем, что функция $z = e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}.$$

В самом деле, вычислим необходимые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot \frac{1}{y} + e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y^2}\right) =$$

$$= -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2} \left(\frac{x}{y} + 1\right).$$

Подставим в дифференциальное уравнение:

$$y \cdot \left(-\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2} \left(\frac{x}{y} + 1\right)\right) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) - e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}.$$

После упрощения получаем, что это равенство верно.

№17. Решение. Так как $y' = p$, то $y'' = \dfrac{dp}{dx}$. Подставляя в уравнение, получим

$$\frac{dp}{dx} = x \;\Leftrightarrow\; dp = xdx \quad \Leftrightarrow\; \int dp = \int xdx \;\Leftrightarrow\quad p = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Сделаем обратную подстановку:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1 \;\Leftrightarrow\; dy = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) dx$$

$$\Leftrightarrow\; \int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) dx \;\Leftrightarrow\; y = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные константы.

Чтобы из найденного общего решения выделить одно (решение задачи Коши), подставим в равенство $y' = \frac{x^2}{2} + C_1$ условие $y'(0) = 2$: $2 = \frac{0^2}{2} + C_1$ и найдём $C_1 = 2$. Чтобы теперь найти C_2, учтём в равенстве $y = \frac{x^3}{3} + 2x + C_2$ оставшееся начальное условие $y(0) = 1$: $1 = \frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0 + C_2$, откуда $C_2 = 1$. Итак, решением задачи Коши будет функция $y = \frac{x^3}{3} + 2x + 1$.

№18. Решение. Дважды дифференцируя заданную функцию, находим, что

$$y' = (C_1 + C_2 x)' e^x + (C_1 + C_2 x)(e^x)' = C_2 e^x + y \quad \Rightarrow \quad y'' = C_2 e^x + y'.$$

Из равенства $y' = C_2 e^x + y$ получаем, что $C_2 e^x = y' - y$. Подставим в равенство $y'' = C_2 e^x + y'$, исключив тем самым выражение $C_2 e^x$:

$$y'' = (y' - y) + y' \quad \Leftrightarrow \quad y'' - 2y' + y = 0.$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение 2-го порядка.

№19. Решение. Дифференцируя, получаем $2(x-C)+2yy' = 0$, отсюда $y' = -\frac{x-C}{y}$. Исключаем теперь произвольную постоянную C. Для этого из последнего уравнения находим $x - C = -yy'$ и, подставляя в данное уравнение, получим

$$y^2 y'^2 + y^2 = 1.$$

Это и есть дифференциальное уравнение данного семейства окружностей.

№20. Решение. Несложно показать, что общим решением данного уравнения в области $y > 0$ и $y < 0$ является функция $y = \dfrac{C}{x}$, где C – произвольная постоянная.

Геометрически общее решение данного уравнения представляет собой семейство гипербол $y = \dfrac{C}{x}$, каждая из которых изображает частное решение данного уравнения. Задавая начальные условия $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, из этого семейства можно выделить ту гиперболу, которая проходит через точку $(1, 1)$ плоскости Oxy.

11 СЕМИНАР: Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений

Раздел: линейная алгебра.

I. Основы линейной алгебры. Понятие матрицы и её размерность. Равные матрицы, квадратные матрицы, диагональные матрицы, единичная и нулевая матрицы. Основные операции над матрицами (умножение матрицы на число, сложение (вычитание) матриц, перемножение матриц, возведение квадратной матрицы в натуральную степень, транспонирование) и их свойства.

Определитель квадратной матрицы и его основные свойства. Вычисление определителей второго и третьего порядков. Приложения: вычисление площади треугольника с вершинами в трёх заданных точках (на плоскости); уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки; условие того, что три точки лежат на одной прямой.

Обратная матрица. Невырожденная матрица. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы. Свойства обратных матриц. Вычисление обратной матрицы (по определению) для матриц 2-го порядка.

II. Системы n линейных уравнений с n неизвестными. Основные понятия и определения. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Системы 2-х линейных уравнений с 2 неизвестными и методы их решения (метод определителей и формулы Крамера, метод обратной матрицы, метод подстановки, метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса), графический подход). Системы 3-х линейных уравнений с 3 неизвестными: метод определителей.

Литература.

[4]. Раздел 1 (Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии). Гл. 1 (Матрицы и определители), 1.1 (Основные сведения о матрицах), 1.2 (Операции над матрицами), 1.3 (Определители квадратных матриц), 1.4 (Свойства определителей), 1.5 (Обратная матрица).

Гл. 2 (Системы линейных уравнений), 2.1 (Основные понятия и определения), 2.2 (Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера), 2.6 (Решение задач).

[5]. Часть 2 (Математический анализ функций нескольких переменных). Гл. 10 (Элементы высшей алгебры), §1 (Матрицы), §2 (Опреде-

лители), §4 (Матричная запись системы линейных уравнений. Понятие обратной матрицы).

Контроль знаний: самостоятельная работа по темам «Неопределённый и определённый интегралы. Функции многих переменных. Дифференциальные уравнения».

11.1 Задачи на матрицы

№ 1. Вычислите значение многочлена $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

№ 2. Выясните, является ли матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$?

№ 3. Выясните, являются ли взаимно обратными данные матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}?$$

№ 4. Используя определение, найдите матрицу, обратную к матрице

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

№ 5. Является ли матрица A обратной к матрице B, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

№ 6. а) Постройте транспонированную матрицу Q^{T} к матрице

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и б) выясните, при каком значении параметра a матрица Q является вырожденной?

№ 7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите $((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

11.2 Задачи на определители

Вычисление определителя разложением его по 1-му столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

№ 8. Вычислите определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

№ 9. Вычислите определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

№ 10. Вычислите определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

№ 11. Вычислите определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$.

№ 12. Вычислите определитель матрицы A:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ 13. Вычислите тот же определитель, что в задаче 12(б), но используя разложение по элементам первой строки.

№ 14. Вычислите определитель 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

разными способами: а) перемножением элементов; б) раскрывая по 1-й строке; в) предварительно упростив с помощью свойств определителей.

№ 15. Упростите и вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}.$$

№ 16. Не раскрывая определитель, а лишь используя его свойства, докажите (объясните) справедливость равенств:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 15 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)}\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в)}\ \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha b_2 + \beta c_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha b_3 + \beta c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{г)}\ \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

№ 17. Докажите тождество: $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

№ 18. Решите уравнение: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$

№ 19. Найдите x из уравнения $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Указание. Разложите определитель по 1-му столбцу.

№ 20. Решите неравенство $0 < \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1.$

№ 21. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $A(-3,0)$, $B(0,5)$, $C(1,-2)$.

Указание. Воспользуйтесь формулой $S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$

11.3 Задачи на системы уравнений

1. Метод обратной матрицы. Пусть решается система n линейных уравнений с n неизвестными

$$AX = B,$$

в которой определитель матрицы $A_{n\times n}$ не равен нулю (в этом случае существует обратная матрица A^{-1}). Чтобы решить систему, надо вычислить обратную матрицу и затем умножить слева обе части матричного уравнения $AX = B$ на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Поскольку $A^{-1}A = E$ (единичная матрица) и $EX = X$, то получим искомое решение

$$X = A^{-1}B.$$

2. Метод определителей для систем двух линейных уравнений с двумя переменными. При решении линейных систем второго порядка

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

следует найти главный определитель системы

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

и выписать два вспомогательных определителя

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Возможны три случая.

1) Если $\triangle \neq 0$, то решение определяется по формулам Кра́мера

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle}, \quad y = \frac{\triangle_y}{\triangle}.$$

2) Если $\triangle = 0$ и хотя бы один из определителей $\triangle_x, \triangle_y$ отличен от нуля, то система не имеет решений (несовместна).

3) Если $\triangle = \triangle_x = \triangle_y = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

Геометрическая интерпретация системы двух линейных уравнений. Каждое из уравнений системы задаёт на плоскости Oxy прямую линию. Возможны три случая взаимного расположения двух прямых на плоскости:

1) прямые пересекаются в одной точке (это соответствует случаю единственного решения и означает непропорциональность коэффициентов при x и y):

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2};$$

2) прямые совпадают (это соответствует случаю бесконечного множества решений системы и означает пропорциональность всех коэффициентов двух уравнений):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2};$$

3) прямые не имеют общих точек (параллельны):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Замечание. Во всех пропорциях выше коэффициенты в знаменателях могут быть равны нулю, если при этом в числителе также стоит нуль.

3. Метод определителей для систем трёх линейных уравнений с тремя переменными. При решении линейных систем третьего порядка

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

следует найти главный определитель системы

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и выписать три вспомогательных определителя

$$\triangle_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \triangle_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Возможны три случая.

1) Если $\triangle \neq 0$, то решение определяется по формулам Кра́мера

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle}, \quad y = \frac{\triangle_y}{\triangle}, \quad z = \frac{\triangle_z}{\triangle}.$$

2) Если $\triangle = 0$ и хотя бы один из определителей $\triangle_x, \triangle_y, \triangle_z$ отличен от нуля, то система не имеет решений (несовместна).

3) Если $\triangle = \triangle_x = \triangle_y = \triangle_z = 0$, то система либо совсем не имеет решений, либо (если она имеет хотя бы одно решение), то она имеет бесконечно много решений.

Правило 1. Если какие-либо два уравнения в системе имеют пропорциональные коэффициенты

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

то эти уравнения эквивалентны и одно из них можно отбросить. В системе останется два уравнения. В этом случае система может иметь или не иметь решений.

Правило 2. Если для каких-либо двух уравнений

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2},$$

то система несовместна.

Правило 3. Если одно из уравнений в системе есть линейная комбинация двух других, т.е., например, $(3) = \alpha\cdot(1)+\beta\cdot(2)$, то это уравнение не несёт дополнительной информации и его можно отбросить. Останется система двух уравнений с тремя неизвестными.

Геометрическая интерпретация системы трёх линейных уравнений. Каждое из уравнений задаёт в трёхмерном пространстве плоскость.

1) Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда три плоскости пересекаются в одной точке, координаты которой и будут решением.

2) Система не имеет решений тогда и только тогда, когда плоскости параллельны или третья плоскость параллельна прямой, по которой пересекаются первые две плоскости.

3) Система имеет бесконечно много решений, если либо все три плоскости совпадают, либо все три плоскости проходят через одну прямую.

№ 22. Сводя к системе уравнений, решите матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

№ 23. Решите методом определителей при всех a системы уравнений второго порядка

$$\text{а)} \begin{cases} ax - 3y = 1, \\ ax - 2y = 2; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 2x - ay = 5, \\ y - 2x = -5. \end{cases}$$

№ 24. Пересекаются ли в одной точке прямые $2x-3y=6$, $3x+y=9$, $x+4y=3$?

Указание: прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда система уравнений имеет единственное решение.

№ 25. Методом обратной матрицы решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=1, \\ 2x_1+x_2+6x_3=2, \\ 3x_1+3x_2+13x_3=2, \end{cases}$$

если известна матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, обратная матрице A системы.

№ 26. Методом определителей (по формулам Крамера) решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2-x_3=3, \\ 3x_1+5x_2=3. \end{cases}$$

№ 27. Решите систему уравнений методом определителей

$$\begin{cases} 2x-3y+z-2=0, \\ x+5y-4z+5=0, \\ 4x+y-3z+4=0. \end{cases}$$

№ 28. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+6z=3, \\ 3x+y-z=1. \end{cases}$$

№ 29. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+2z=3, \\ 3x+3y+3z=4. \end{cases}$$

№ 30. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 8, \\ 3x + y - z = 1. \end{cases}$$

№ 31. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

№ 32. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases}$$

№ 33. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 8, \\ -x - 2y - 3z = -4. \end{cases}$$

№ 34. При всех значениях параметра a решите систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - y = 2, \\ x + 4y = a. \end{cases}$$

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ.

11.1. Задачи на матрицы.

№1. Найдём $2A^2$, $5A$ и $3E$, где E – единичная матрица:

$$2A^2 = 2\cdot A\cdot A = 2\cdot\begin{pmatrix}2&4\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&4\\1&0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}8&8\\2&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16&16\\4&8\end{pmatrix};$$

$$5A = 5\cdot\begin{pmatrix}2&4\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10&20\\5&0\end{pmatrix};\quad 3E = 3\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(A) = 2A^2 - 5A + 3E =$$
$$= \begin{pmatrix}16&16\\4&8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10&20\\5&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&-4\\-1&11\end{pmatrix}.$$

№2. Найдём произведения AA^{-1} и $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix}2&3\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix}-2&1\\\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\5&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = E.$$

В соответствии с определением обратной матрицы[1], данные матрицы являются взаимно обратными.

№ 3. Выясним, являются ли взаимно обратными матрицы A и B. Для этого перемножим их:

$$AB = \begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\cdot 0+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot 1+(-1)\cdot 1\\ 1\cdot 0+0\cdot(-1) & 1\cdot 1+0\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = E.$$

Так как в результате получили единичную матрицу, то матрицы A и B являются взаимно обратными.

№ 4. a) Обозначим $A^{-1} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. По определению обратной матрицы,

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}a&b\\2a-c&2b-d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

[1] На множестве матриц не определена операция деления, она заменена умножением на обратную матрицу.

Матрицы равны тогда и только тогда, когда все их соответствующие элементы равны, поэтому приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \\ 2a - c = 0, \\ 2b - d = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \\ c = 2, \\ d = -1. \end{cases}$$

Таким образом, обратная матрица имеет вид $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

б) Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

№ 5. Проверим, является ли матрица A обратной к матрице B. Для этого перемножим эти матрицы:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 7 \cdot 5 + (-6) \cdot 7 & 4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + (-6) \cdot 3 & 4 \cdot (-1) + 7 \cdot 4 + (-6) \cdot 4 \\ (-8) \cdot 2 + (-15) \cdot 5 + 13 \cdot 7 & (-8) \cdot 1 + (-15) \cdot 2 + 13 \cdot 3 & (-8) \cdot (-1) + (-15) \cdot 4 + 13 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 5 + 1 \cdot 7 & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3 & (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: да, это обратные матрицы.

№ 6. а) Транспонируя матрицу, получим

$$Q^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Матрица Q вырождена $\Leftrightarrow \det Q = 0$. Найдём определитель:

$$\det Q = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{ (раскроем по первой строке) } =$$

$$= \; -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = -15a.$$

Следовательно, матрица будет вырожденной только при условии $-15a = 0$, т.е. $a = 0$.

№ 7. Поскольку $((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}$, то получим

$$((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

11.2. Задачи на определители.

№ 8. Вычислим определитель 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot (-2) = 18 + 8 = 26.$$

№ 9. Вычислим определитель 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot (-\cos\alpha) = 1.$$

№ 10. Вычислим определитель 3-го порядка, раскрыв его по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (4 - 6) + 1 \cdot (-2) = -12.$$

№ 11. Вычислим определитель 3-го порядка, раскрыв его по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= a(a^2 + 1) - (-a - a) + a(1 - a^2) = 4a.$$

№ 12. а) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 6 \cdot 5 = -28;$

б) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1{\cdot}1{\cdot}1 + 5{\cdot}3{\cdot}0 + 0{\cdot}2{\cdot}2 - 0{\cdot}1{\cdot}0 - 3{\cdot}2{\cdot}1 - 1{\cdot}5{\cdot}2 = -15.$

№ 13. Имеем:

$$\det A = 1\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}5&2\\0&1\end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix}5&1\\0&3\end{vmatrix} = 1\cdot(-5)+2\cdot(-5)+0\cdot 15 = -15.$$

№ 14. а) Раскроем определитель стандартно:

$$\begin{vmatrix}2&-3&1\\6&-6&2\\2&-1&2\end{vmatrix} = 2\cdot(-6)\cdot2+6\cdot(-1)\cdot1+2\cdot(-3)\cdot2-2\cdot(-6)\cdot1-(-1)\cdot2\cdot2-2\cdot6\cdot(-3) =$$

$$= -24-6-12+12+4+36 = 10;$$

б) Раскрывая определитель по первой строке, имеем:

$$\begin{vmatrix}2&-3&1\\6&-6&2\\2&-1&2\end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix}-6&2\\-1&2\end{vmatrix} - (-3)\cdot\begin{vmatrix}6&2\\2&2\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}6&-6\\2&-1\end{vmatrix} =$$

$$= 2(-12+2)+3(12-4)+(-6+12) = -20+24+6 = 10;$$

в) Вынесем множитель 2 из 2-ой строки:

$$\begin{vmatrix}2&-3&1\\6&-6&2\\2&-1&2\end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix}2&-3&1\\3&-3&1\\2&-1&2\end{vmatrix} = \text{ (вычтем из 2-й строки первую) } = 2\cdot\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&0&0\\2&-1&2\end{vmatrix} =$$

$$\text{(поменяем местами первые две строки) } = -2\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-3&1\\2&-1&2\end{vmatrix} =$$

$$\text{(вычтем из 2-й и 3-й строк удвоенную первую строку) } = -2\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-3&1\\0&-1&2\end{vmatrix} =$$

$$\text{(вычтем из 3-й строки удвоенную вторую строку) } = -2\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-3&1\\0&5&0\end{vmatrix} =$$

$$\text{(вынесем множитель 5 из 3-й строки) } = -10\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-3&1\\0&1&0\end{vmatrix} =$$

$$\text{(прибавим ко 2-й строке утроенную третью строку) } = -10\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix} =$$

(поменяем местами вторую строку с третьей) $= 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10.$

№ 15. Решение.

а) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$ (из 1-й строки вычтем 3-ю)

$$= a^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \text{(из 2-й строки вычтем 3-ю)}$$

$$= a^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \text{(вынесем множитель 4)}$$

$$= 4a^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \text{(к 3-й строке прибавим 1-ю и 2-ю строки)}$$

$$= 4a^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4a^3.$$

б) $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix} =$ (из 1-го столбца вычесть 3-й и ко 2-му столбцу прибавить 3

$$= \begin{vmatrix} m & m & a \\ n & 2n & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \text{(из 2-го столбца вычесть 1-й столбец)}$$

$$= \begin{vmatrix} m & 0 & a \\ n & n & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \text{(вынести множитель } a \text{ из 3-го столбца)}$$

$$= a \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ n & n & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{(из 1-го столбца вычесть 2-й)} = a \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & n & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\text{(из 1-й и 2-й строк вычесть 3-ю строку)} = a \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = amn.$$

Ответ: а) $-4a^3$; б) amn.

№ 16. а) Определитель имеет два равных столбца. б) Определитель имеет две пропорциональные строки. в),г) Воспользоваться свойством: определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-нибудь строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

№ 17. Для доказательства тождества раскроем определитель по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} b & ca \\ c & ab \end{vmatrix} - a\cdot\begin{vmatrix} 1 & ca \\ 1 & ab \end{vmatrix} + bc\cdot\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = ab^2 - ac^2 - a(ab-ac) + bc(c-b) =$$

$$= a(b-c)(b+c) - a^2(b-c) - bc(b-c) =$$
$$= (b-c)(a(c-a) - b(c-a)) = (b-c)(c-a)(a-b) =$$
$$= (b-a)(c-a)(c-b).$$

№ 18. Решим уравнение: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$. Упростим определитель, вычитая 1-й столбец из 2-го и 3-го столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем теперь определитель по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} -x & 0 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x(1-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

№ 19. Вычисляя определитель по первому столбцу (здесь это удобнее), получим

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - x\cdot\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -x^2 + 5x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

№ 20. Раскрывая определитель по 1-й строке, получим: $3(-x+4) + 2(-1-2) + 1(2+x) = -2x + 8$. Итак, $0 < -2x + 8 < 1$.

Ответ: $x \in \left(\dfrac{7}{2}, 4\right)$.

№ 21. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -15 - 5 - 6 = -26.$$

Тогда площадь треугольника $S = \frac{1}{2}|-26| = 13$ (кв.ед.)

Ответ: площадь треугольника $S = 13$ (кв.ед.)

11.1. Задачи на системы уравнений.

№ 22. Перепишем матричное уравнение в виде системы

$$\begin{cases} 4x + y = 6, \\ 3x + 2y = 7; \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

№ 23. а) Найдём

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & -3 \\ a & -2 \end{vmatrix} = a, \quad \triangle_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4, \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = a.$$

При $\triangle = a \neq 0$ по формулам Крамера находим единственное решение $x = \frac{\triangle_x}{\triangle} = \frac{4}{a}$, $y = \frac{\triangle_y}{\triangle} = \frac{a}{a} = 1$. При $\triangle = a = 0$ имеем $\triangle_x = 4 \neq 0$, поэтому система несовместна.

Ответ: при $a \neq 0$ единственное решение $(\frac{4}{a}, 1)$; при $a = 0$ решений нет.

б) Ответ: при $a \neq 1$ единственное решение $(\frac{5}{2}, 0)$; при $a = 1$ бесконечно много решений вида $(t, 2t - 5)$, где $t \in \mathbb{R}$.

№ 24. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6, & (1) \\ 3x + y = 9, & (2) \\ x + 4y = 3. & (3) \end{cases}$$

Заметим, что (1) + (3) = (2), тогда уравнение (2) можно отбросить: $\begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ x + 4y = 3, \end{cases}$ и т.к. $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-3}{4}$, то система имеет единственное решение, следовательно, прямые пересекаются в одной точке.

№ 25. Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Тогда имеем

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -1)$.

№ 26. Вычислим главный определитель системы:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 5\cdot 1 + 3\cdot(-3)\cdot(-1) - 3\cdot 2\cdot 1 - 5\cdot(-1)\cdot 2 - 0\cdot 1\cdot(-3) = 18 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное решение. Найдём три вспомогательных определителя системы:

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18; \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \triangle_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$

Теперь по формулам Крамера можно найти решение:

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{18}{18} = 1, \quad x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{0}{18} = 0, \quad x_3 = \frac{\triangle_3}{\triangle} = \frac{-36}{18} = -2.$$

Ответ: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, -2)$.

№ 27. Ответ: $(x, y, z) = (5, 6, 10)$.

№ 28. Заметим, что $\triangle = 0$ (так как $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$), а $\triangle_x = -19 \neq 0$. Поэтому система не имеет решений. Иначе: по 2-му правилу для первых двух уравнений имеем:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{4}{3}.$$

Это означает, что система несовместна.

Ответ: нет решений.

№ 29. Ответ: система несовместна, решений нет.

№ 30. Коэффициенты первых двух уравнений пропорциональны, поэтому эти уравнения эквивалентны. Отбросим одно из них. Исходная система равносильна следующей

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 3x + y - z = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y = 4 - 3z, \\ 3x + y = z + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 4 - 3z - 2y, \\ 3(4 - 3z - 2y) + y = z + 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z - \frac{2}{5}, \\ y = \frac{11}{5} - 2z. \end{cases}$$

Ответ: система имеет бесконечно много решений вида $(z - \frac{2}{5}, \frac{11}{5} - 2z, z)$, где $z \in \mathbb{R}$.

№ 31. Ответ: система имеет бесконечно много решений вида $(1, -z, z)$, где $z \in \mathbb{R}$.

№ 32. Заметим, что в данной системе третье уравнение равно сумме первых двух (см. Правило 3). Тогда это уравнение можно отбросить:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y = 4 - 3z, \\ 2x + y = z + 3, \end{cases}$$

откуда находим решения.

Ответ: $\left(\dfrac{2 + 5z}{3}, \dfrac{5 - 7z}{3}, z\right)$, где $z \in \mathbb{R}$.

№ 33. В данном случае коэффициенты всех трёх уравнений пропорциональны, а значит, все три уравнения эквивалентны. Два уравнения можно отбросить и система оказывается эквивалентна одному-единственному уравнению (оставляем то, что проще):

$$x + 2y + 3z = 4.$$

Ответ: бесконечно много решений вида $(4 - 2y - 3z, y, z)$, где $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.

№ 34. Ответ: при $a = 3$ система имеет единственное решение $\left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$; при $a \neq 3$ решений нет.

12 СЕМИНАР: Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве

Раздел: Аналитическая геометрия.

I. Аналитическая геометрия на плоскости. Основной метод – метод координат. Понятие линии, её уравнения. Алгебраические линии 1-го и 2-го порядков. Способы задания прямой на плоскости (общее уравнение, уравнение в отрезках, с угловым коэффициентом, каноническое уравнение, параметрические уравнения). Условия параллельности, совпадения, пересечения прямых на плоскости. Угол между прямыми. Условие перпендикулярности прямых. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в заданном отношении. Расстояние от точки до прямой. Кривые 2-го порядка: эллипс, парабола, гипербола.

II. Аналитическая геометрия в пространстве. Общее уравнение плоскости. Нормаль к плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданному вектору $\vec{n}$. Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой. Условия параллельности, совпадения и пересечения плоскостей в пространстве. Угол между плоскостями. Канонические уравнения прямой. Направляющий вектор прямой. Уравнения прямой, проходящей через две различные точки. Параметрические уравнения прямой. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Условие ортогональности прямой и плоскости. Расстояние между двумя точками. Расстояние от точки до плоскости. Поверхности 2-го порядка: эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, конус, параболоид, цилиндр.

ЛИТЕРАТУРА.

[4]: Раздел 1 (Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии), Гл. 4 (Уравнение линии. Прямая и плоскость). 4.1 (Простейшие задачи. Уравнение прямой на плоскости), 4.2 (Кривые второго порядка), 4.3 (Прямая и плоскость в пространстве).

[5]: Гл. 3 (Аналитическая геометрия на плоскости). §3 (Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости), §6 (Линии первого порядка), §7 (Смешанные задачи на прямую), §8 (Линии второго порядка).

Гл. 10 (Аналитическая геометрия в пространстве). §1 (Прямоугольная система координат в пространстве), §7 (Уравнения плоскости), §8 (Уравнения прямой), §9 (Прямая и плоскость), §10 (Уравнения поверхности и линии. Уравнение цилиндрической поверхности и поверхностей второго порядка).

Контроль знаний: проверка выполнения домашнего задания.

12.1 Задачи на плоскости

№ 1. Даны вершины треугольника $A(7,9)$, $B(2,-3)$, $C(3,6)$. Найдите длину медианы AD.

Указание. Найдите координаты точки $D(x_D, y_D)$ – середины BC:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2},$$

а затем найдите координаты вектора

$$\overrightarrow{AD} = \{x_D - x_A, y_D - y_A\}$$

и его длину AD.

№ 2. Составьте уравнение линии, расстояние от каждой точки $M(x,y)$ которой до заданной точки $A(2,-2)$ равно расстоянию от M до прямой $x+1=0$.

Указание. Воспользуйтесь формулами:

– расстояние между произвольными точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

– расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

№ 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через две точки плоскости $M(2,4)$ и $N(-1,0)$.

Указание. Воспользуйтесь уравнением прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$

№ 4. Найдите уравнение множества точек плоскости, равноудалённых от точек $A(-4,2)$ и $B(-2,-6)$.

Указание: воспользуйтесь формулой $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ расстояния между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на плоскости.

№ 5. Найдите точку, удалённую на 5 единиц как от точки $A(2,1)$, так и от оси Oy.

№ 6. Даны точки $A(1,1)$ и $B(7,4)$. Найдите точку $M(x,y)$, которая лежит на отрезке AB и в два раза ближе к A, чем к B.

Указание. Воспользуйтесь формулой *деления отрезка в заданном отношении.* Пусть точка M делит отрезок AB в заданном отношении $\frac{AM}{MB}=\lambda$. Если λ и координаты точек $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ известны, то точка $M(x_M,y_M)$ имеет координаты:

$$x_M=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y_M=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

№ 7. а) Какую линию (кривую) задаёт на плоскости уравнение $x^2+2x+y^2=0$? Как проверить, лежат ли точки $A(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $B(-1,-1)$, $C(1,0)$ внутри, на, вне этой линии?

б) Какие множества (фигуры) задают на плоскости неравенства $x^2+2x+y^2-4y\le 20$, $x^2+2x+y^2-4y>20$?

Указание. Для приведения уравнения (неравенства) к стандартному виду выделите полные квадраты по переменным x и y.

№ 8. Напишите уравнение геометрического места точек (ГМТ), равноудалённых от точки $F(2,2)$ и от оси Ox. Постройте линию по её уравнению.

№ 9. Составьте уравнение с угловым коэффициентом для прямой, отсекающей в положительном направлении оси Oy отрезок длины 3 и образующей с положительным направлением оси Ox угол $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

Напишите для этой прямой: а) общее уравнение; б) уравнение в отрезках на координатных осях.

№ 10. Приведите уравнение прямой $2x-3y=6$: а) к виду с угловым коэффициентом; б) к каноническому виду; в) составьте параметрические уравнения этой прямой. Найдите нормальный и направляющий векторы этой прямой.

№ 11. Известно, что прямая проходит через точку $M_0(2,1)$ и образует с осью Ox угол $\alpha=\operatorname{arctg}2$. Составьте: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) общее уравнение; в) в отрезках на координатных осях; г) каноническое уравнение; д) параметрические уравнения этой прямой.

Указание. Для составления уравнения с угловым коэффициентом можно воспользоваться *уравнением прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad \text{или } \ y = y_0 + k(x - x_0).$$

№ 12. Составьте всевозможные виды (с угловым коэффициентом, общее, в отрезках, каноническое, параметрические) уравнений прямой, проходящей через точки $A(3, 1)$ и $B(5, 4)$.

№ 13. Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -3)$ перпендикулярно вектору $\vec{b}\{-1; 4\}$.

Указание. Воспользуйтесь формулой: уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{n} = \{A, B\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

№ 14. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $N(3, -2)$, если её направляющий вектор известен и равен $\vec{l}\{-1; 5\}$.

Указание. Воспользуйтесь каноническим уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{l} = \{m, k\}$: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{k}$.

№ 15. Напишите уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая при своём движении остаётся втрое дальше от точки $A(0, 9)$, чем от точки $B(0, 1)$.

№ 16. Найдите расстояние между параллельными прямыми

$$3x + 4y - 24 = 0 \quad \text{и} \quad 3x + 4y + 6 = 0.$$

Указание: расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

№ 17. Площадь треугольника равна 3 кв. ед., две его вершины – точки $A(3, 1)$ и $B(1, -3)$. Найдите координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси ординат.

Указание. Площадь треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ находится по формулам:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

№ 18. Определите, при каком значении a точки $A(-2,0)$, $B(0,a)$, $C(6,4)$ лежат на одной прямой.

Указание: три точки $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

№ 19. Определите угол между прямыми $y = 2x - 3$ и $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Указание: угол φ между двумя прямыми, заданными на плоскости уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, находится по формуле $\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$. В частности, условие перпендикулярности прямых имеет вид: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

№ 20. Среди прямых а) $3x-2y+7=0$, б) $6x-4y-9=0$, в) $6x+4y-5=0$, г) $2x+3y-6=0$ укажите параллельные и перпендикулярные.

Указание: две прямые на плоскости, заданные общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, *параллельны* при условии

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

и *перпендикулярны* при условии $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

№ 21. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(6,2)$ на прямую $x - 4y - 7 = 0$.

№ 22. При каких значениях параметра a прямые $0,2x+3,1y+2,3=0$ и $x + ay = 11,5$: а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны; г) пересекаются в одной точке.

Указание. Если прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то

а) условие их пересечения в одной точке:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2};$$

б) условие их перпендикулярности:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0;$$

в) условие параллельности:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

г) условие совпадения:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

№ 23. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4,3)$ и параллельной другой прямой $x+2y+3=0$.

№ 24. Найдите уравнения биссектрис углов между прямыми $3x+4y-1=0$ и $4x-3y+5=0$.

№ 25. Приведя уравнение к каноническому виду (выделением полных квадратов по переменным x и y), определите вид кривой 2-го порядка: $3x^2+4y^2-6x+8y-5=0$.

Указание. Канонические (простейшие) уравнения в прямоугольных координатах основных алгебраических кривых второго порядка:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (эллипс); если $a=b$, то эллипс становится окружностью;

2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (гипербола);

3) $y^2=2px$, $x^2=2py$ (параболы). Подробнее см. в лекциях.

№ 26. Изобразите плоскую кривую $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$.

Указание: уравнение вначале следует привести к каноническому виду, используя приём, связанный с выделением полных квадратов по переменным x и y.

№ 27. Приведя уравнение к каноническому виду, определите вид плоской кривой $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$.

Указание: воспользуйтесь выделением полных квадратов по переменным x и y.

№ 28. Приведя уравнение к каноническому виду, определите вид плоской кривой $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0$.

Указание: воспользуйтесь выделением полных квадратов по переменным x и y.

№ 29. Определите вид кривой и постройте её: $x^2+x+y=0$.

Указание: выделите полный квадрат по переменной x.

12.2 Задачи в пространстве

№ 30. Даны точки $M_1(0,-1,3)$ и $M_2(1,3,5)$. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Указание. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\{A,B,C\}$, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

№ 31. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,-1,3)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

Указание. Воспользуйтесь уравнением плоскости в отрезках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, где a, b, c – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox, Oy и Oz.

№ 32. Найдите угол между плоскостями $x-2y+2z-8=0$ и $x+z-6=0$.

Указание: угол между плоскостями равен углу между их нормалями. *Нормалью к плоскости* называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой плоскости. В частности, если плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то вектор $\vec{n}\{A, B, C\}$ является нормалью.

№ 33. Найдите расстояние от точки $(4; 3; 0)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 3; 0)$, $M_2(4; -1; 2)$ и $M_3(3; 0; 1)$.

Указание. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

№ 34. Найдите плоскость, проходящую через точку $M(2, 2, -2)$ и параллельную плоскости $x-2y-3z=0$.

Указание: учесть, что так как плоскости параллельны, то у них общая нормаль. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\{A, B, C\}$, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

№ 35. Напишите канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(4, 3, 0)$ и параллельной вектору $\vec{e}\{-1; 1; 1\}$.

Указание. Канонические уравнения прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{l}=\{m, k, p\}$, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Параметрические уравнения прямой вытекают из канонических уравнений. В самом деле, введём параметр $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{k}=\frac{z-z_0}{p}=t.$$

Отсюда, разбивая на три уравнения, получаем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + kt, \\ z = z_0 + pt, \text{ где } \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№ 36. Напишите канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1, 2, 3)$ и $B(2, 6, -2)$.

№ 37. Какую поверхность в пространстве задаёт уравнение

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9?$$

Неравенство $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 \leq 9$?

№ 38. Какую поверхность в пространстве задают уравнения:

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \text{и} \quad z^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2?$$

Изобразите (опишите) эти поверхности.

№ 39. Какую поверхность в пространстве задаёт уравнение

$$(x-1)^2 + 9(y+2)^2 + z^2 = 9?$$

№ 40. Какое множество точек задаёт уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ на плоскости? В пространстве? Изобразите эти множества.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ.

12.1. Задачи на плоскости.

№1. Решение. Найдём координаты точки $D(x_D, y_D)$ – середины BC:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2},$$

т.е. $D(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$. Найдём координаты вектора

$$\overrightarrow{AD} = \{x_D - x_A, y_D - y_A\} = \left\{\frac{5}{2} - 7, \frac{3}{2} - 9\right\} = \left\{-\frac{9}{2}, -\frac{15}{2}\right\}.$$

Тогда $AD = \sqrt{(-\frac{9}{2})^2 + (-\frac{15}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{306}$.

№ 2. Решение. Найдём расстояние от произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на линии, до точки $A(2, -2)$:

$$r = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}. \tag{1}$$

Вычислим расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой $x + 1 = 0$, т.е. $1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 = 0$:

$$r = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x + 1|. \tag{2}$$

Приравнивая правые части (1) и (2), получаем искомое уравнение линии:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} = |x+1|, \quad \text{или} \quad (y+2)^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Это парабола с вершиной в точке $(\frac{1}{2}, -2)$. Она получается сдвигом параболы $y^2 = 6x$ вправо на $\frac{1}{2}$ (вдоль оси Ox) и вниз на 2 единицы (вдоль оси Oy).

№ 3. Решение. Выписывая определитель и раскрывая его, получим

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -y + 4x - 2y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 3y + 4 = 0.$$

Ответ: $4x - 3y + 4 = 0$.

№ 4. Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка, лежащая на искомой линии. По условию, $AM = BM$, или в координатной записи

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+6)^2}.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + (y+6)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 4y - 5 = 0$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{4}$.

№ 5. Решение. Пусть $M(x, y)$ – искомая точка. Поскольку точка равноудалена на 5 единиц от оси ординат, то это означает, что точка M имеет кординаты $M(5, y)$ или $M(-5, y)$. Далее, удалённость на 5 единиц от точки A означает выполнение условия $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 5$. При $x = 5$ получаем $y = -3$ или $y = 5$. Т.е. нашлось две точки $M_1(5, -3)$ и $M_2(5, 5)$. При $x = -5$ решений нет.

Ответ: $M_1(5, -3)$ и $M_2(5, 5)$.

№ 6. Решение. В данном случае $\lambda = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому

$$x_M = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 7}{1 + \frac{1}{2}} = 3, \quad y_M = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = 2.$$

Ответ: $M(3, 2)$.

№ 7. Решение. а) Выделяя полный квадрат по переменной x, перепишем уравнение в виде $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Это окружность радиуса 1 с центром в точке $(-1, 0)$. Чтобы проверить, лежат ли точки $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $B(-1, -1)$, $C(1, 0)$ внутри, на, вне этой линии, надо подставить их координаты в выражение $(x+1)^2 + y^2$ и сравнить с 1.

Если окажется, что $(x+1)^2 + y^2 = 1$, то точка лежит на окружности. Если окажется, что $(x+1)^2 + y^2 < 1$, то точка лежит внутри окружности. Если получится, что $(x+1)^2 + y^2 > 1$, то точка лежит вне окружности.

б) Чтобы узнать, какие множества задаются на плоскости неравенствами, приведём их к виду $(x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 5^2$, $(x+1)^2 + (y-2)^2 > 5^2$. Тогда становится очевидным, что первое из неравенств задаёт замкнутый (т.е. включая границу – окружность) круг с центром в точке $(-1, 2)$ и радиусом 5, а второе неравенство определяет внешнюю часть этого круга.

№ 8. Решение. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит искомой фигуре. По условию, $MF = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$. С другой стороны, расстояние от M до оси Ox равно $|y|$. Приравнивая, получаем уравнение:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = |y| \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 + (y-2)^2 = y^2 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1.$$

№ 9. Решение. Сделайте рисунок. Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом имеет вид $y = kx + b$. По условию, при $x = 0$ должно быть $y = 3$, отсюда находим коэффициент $b = 3$. Найдём, далее, угловой коэффициент: $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Получили уравнение прямой: $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 3$.

а) Общее уравнение данной прямой: $x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3} = 0$;

б) получим уравнение в отрезках:

$$x - \sqrt{3}y = -3\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{-3\sqrt{3}} + \frac{-\sqrt{3}y}{-3\sqrt{3}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{-3\sqrt{3}} + \frac{y}{3} = 1,$$

т.е. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, где $a = -3\sqrt{3}$, $b = 3$.

№ 10. Решение. а) Для получения уравнения с угловым коэффициентом достаточно выразить из уравнения y через x: $y = \dfrac{2}{3}x - 2$.

б) Для получения канонического уравнения прямой найдём (подбором) любые две точки, принадлежащие этой прямой, например, $M_1(3, 0)$ и $M_2(0, -2)$, и воспользуемся формулой (*каноническое уравнение прямой, проходящей через две различные точки* $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 3}{0 - 3} = \frac{y - 0}{-2 - 0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 3}{-3} = \frac{y}{-2}.$$

в) Для составления параметрических уравнений данной прямой приравняем обе части канонического уравнения к параметру t, разбив их на два уравнения:

$$\frac{x - 3}{-3} = \frac{y}{-2} = t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 - 3t, \\ y = -2t, \text{ где } \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№ 11. Решение. По условию, прямая проходит через точку $M_0(2, 1)$ и образует с осью Ox угол $\alpha = \operatorname{arctg} 2$.

а) для составления уравнения с угловым коэффициентом воспользуемся фактом: *если прямая имеет угловой коэффициент k и проходит через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$, то её уравнение имеет вид

$$y = y_0 + k(x - x_0).$$

Подставляя в это уравнение известные координаты точки и учитывая, что угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой (к положительному направлению оси абсцисс), т.е. $k = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) = 2$, получим искомое уравнение

$$y = 1 + 2(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 3. \tag{1}$$

б) общее уравнение прямой на плоскости имеет вид $Ax + By + C = 0$. В данном случае, перенося все слагаемые в уравнении (1) в одну сторону, получаем общее уравнение этой прямой:

$$2x - y - 3 = 0. \tag{2}$$

в) уравнение в отрезках на координатных осях имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Перепишем уравнение (2) в виде $2x - y = 3$, разделим на 3 и получим

$$\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-3} = 1, \quad \text{где } \ a = \frac{3}{2}, \ b = -3. \tag{3}$$

г) каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{l}\{m, k\}$ (он называется направляющим вектором прямой), имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{k}.$$

В данном случае в качестве направляющего вектора можно взять, например, вектор $\vec{l}\{1, 2\}$, так как он параллелен данной прямой. (Найти направляющий вектор можно было иначе: подобрать две любые точки, лежащие на этой прямой, например $N(0; -3)$, $K(\frac{3}{2}, 0)$ и тогда положить $\vec{l} = \overrightarrow{NM}$). Отсюда получаем каноническое уравнение:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{2}.$$

д) чтобы получить параметрические уравнения этой прямой, приравняем каноническое уравнение к произвольному действительному параметру t, откуда получаем два параметрических уравнения:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{2} = t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 + 2t, \ \text{где } \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№ 12. Ответ: $\dfrac{y-1}{3} = \dfrac{x-3}{2}$ (каноническое уравнение); $3x - 2y - 7 = 0$ (общее уравнение); $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{2}$ (с угловым коэффициентом); $\dfrac{x}{7/3} + \dfrac{y}{-7/2} = 1$ (в отрезках); $x = 3 + 2t$, $y = 1 + 3t$ (параметрические уравнения).

№ 13. Ответ: $x - 4y - 14 = 0$.

№ 14. Ответ: $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{5}$.

№ 15. Решение. По условию имеем: $AM = 3 \cdot BM$, где

$$AM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-9)^2}, \quad BM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}.$$

Подставляя в уравнение, получаем:

$$\sqrt{x^2 + (y-9)^2} = 3\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \;\Leftrightarrow\; x^2 + (y-9)^2 = 9(x^2 + (y-1)^2)$$

$$\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 9.$$

№ 16. Решение. Возьмём на одной из прямых, например на первой, произвольную точку $A(0,6)$. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки A до второй прямой:

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6.$$

№ 17. Решение. Пусть $C(0,y)$ – третья вершина. Найдём определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix} = -2y - 10.$$

Тогда $S = \dfrac{1}{2}|-2y - 10| = |y + 5| = 3$, откуда $y + 5 = 3$ или $y + 5 = -3$, а значит $y = -2$ или $y = -8$.

Ответ: $C_1(0,-2)$, $C_2(0,-8)$.

№ 18. Решение. Подставляя координаты точек в определитель, получаем условие

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2a - 6a + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1.$$

Ответ: при $a = 1$.

№ 19. Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.

№ 20. По условию, надо указать среди прямых а) $3x - 2y + 7 = 0$, б) $6x - 4y - 9 = 0$, в) $6x + 4y - 5 = 0$, г) $2x + 3y - 6 = 0$ параллельные и перпендикулярные.

Ответ: прямые а) и б) параллельны, прямые б) и г) перпендикулярны.

№ 21. Решение. Приведём уравнение прямой к виду с угловым коэффициентом $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{4}$. Уравнение перпендикуляра ищем в виде $y = -4x + b$. Найдём коэффициент b, подставив в это уравнение координаты точки $A(6,2)$: $2 = -4 \cdot 6 + b$, отсюда $b = 26$. Тогда уравнение перпендикуляра имеет вид $y = -4x + 26$, или $4x + y - 26 = 0$.

№ 22. Ответ: а) при $a = 15,5$; б) ни при каких; в) при $a = -\dfrac{2}{31}$; г) при $a \neq 15,5$.

№ 23. Решение. Будем искать уравнение прямой в виде $x+2y+C = 0$. Найдём константу C, подставив в уравнение прямой координаты точки $A(-4,3)$: $-4 + 2 \cdot 3 + C = 0$, откуда $C = -2$. Ответ: $x + 2y - 2 = 0$.

№ 24. Решение. Две прямые образуют две пары вертикальных углов. Для каждой пары существует своя биссектриса. Каждая точка любой из двух биссектрис находится на одинаковом расстоянии от двух данных прямых. Пусть точка $M(x,y)$ лежит на биссектрисе. Тогда она равноудалена от обеих прямых и, следовательно, справедливо равенство

$$\frac{|3x + 4y - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x - 3y + 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \quad \Leftrightarrow \quad |3x + 4y - 1| = |4x - 3y + 5|,$$

отсюда либо $3x+4y-1 = 4x-3y+5$, либо $3x+4y-1 = -(4x-3y+5)$.

Ответ: $x - 7y + 6 = 0$, $7x + y + 4 = 0$.

№ 25. Решение. $3(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 2y + 1) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 12 \Leftrightarrow$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1.$$

Это эллипс с центром в точке $(1,-1)$.

№ 26. Решение. $4(x^2+2x+1)-(y^2+2y+1) = 0 \Leftrightarrow 4(x+1)^2-(y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - y + 1)(2x + y + 3) = 0$. Это две пересекающиеся прямые.

Ответ: $(2x-y+1)(2x+y+3) = 0$ – это две пересекающиеся прямые.

№ 27. Ответ: $\dfrac{(x-3)^2}{16} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$ – это гипербола с центром в точке $(3,-2)$.

№ 28. Ответ: $2(x+2)^2 + 3(y-1)^2 = 0$ – это точка $(-2,1)$.

№ 29. Ответ: $y = \dfrac{1}{4} - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$ – это парабола с вершиной в точке $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ и ветвями, направленными вниз.

12.2. Задачи в пространстве.

№ 30. Решение. Найдём вектор $\overrightarrow{M_1M_2}\{1;4;2\}$, тогда уравнение плоскости имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, или $1\cdot(x-0)+4\cdot(y+1)+2\cdot(z-3)=0$, т.е. $x+4y+2z-2=0$.

№ 31. Решение. Имеем: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{a}=1$. Умножим на a и подставим в уравнение координаты точки M: $2-1+3-a=0$, откуда $a=4$. Следовательно, искомое уравнение $x+y+z-4=0$.

№ 32. Решение. Найдём векторы нормалей: $\overrightarrow{n_1}\{1;-2;2\}$, $\overrightarrow{n_2}\{1;0;1\}$. Угол между плоскостями равен:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1\cdot 1+(-2)\cdot 0+2\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

№ 33. Решение. 1) Найдём уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ 4-1 & -1-3 & 2-0 \\ 3-1 & 0-3 & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ 4-1 & -1-3 & 2-0 \\ 3-1 & 0-3 & 1-0 \end{vmatrix} = 2x+y-z-5=0.$$

2) Найдём расстояние:

$$d = \frac{|2\cdot 4+1\cdot 3+(-1)\cdot 0-5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $d=\sqrt{6}$.

№ 34. Решение. Так как плоскости параллельны, то у них общая нормаль $\overrightarrow{n}\{1;-2;-3\}$. Поэтому уравнение имеет вид: $1\cdot(x-2)-2(y-2)-3(z+2)=0$, т.е. $x-2y-3z-4=0$.

№ 35. Ответ: канонические уравнения: $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{1}$; параметрические уравнения: $x=4-t$, $y=3+t$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$.

№ 36. Решение. $\dfrac{x+1}{2+1}=\dfrac{y-2}{6-2}=\dfrac{z-3}{-2-3}$, или $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{-5}$.

№ 37. Ответ: уравнение задаёт сферу с центром в точке $(1,-2,0)$ и радиусом 3, а неравенство – шар с тем же центром и радиусом.

№ 38. Ответ: это конус с вершиной в точке $(0,0,0)$ и осью, совпадающей с осью Oz (аппликат). Конус с вершиной в точке $(1,-3,0)$ и осью, параллельной оси Oz.

Замечание. В общем случае *конус* задаётся каноническим (простейшим) уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

№ 39. Делением на 9 приведём уравнение $(x-1)^2+9(y+2)^2+z^2=9$ к каноническому виду

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{1^2}+\frac{z^2}{3^2}=1.$$

Тогда становится видно, что оно определяет в пространстве эллипсоид с центром в точке $(1,-2,0)$ с полуосями $a=3$, $b=1$, $c=3$.

Замечание. В общем случае эллипсоид в пространстве определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где положительные числа a,b,c называются его *полуосями*. Линии пересечения эллипсоида с плоскостями, параллельными координатным осям, являются эллипсами.

№ 40. Ответ: на плоскости – эллипс, в пространстве – эллиптический цилиндр с осью, совпадающей с осью аппликат.

13 СЕМИНАР: Кратные и криволинейные интегралы

Раздел: математический анализ.

I. Понятие двойного интеграла. Понятие двойного интеграла как предела интегральной суммы, его основные свойства (линейность, аддитивность, интегрируемость произведения, интегрирование неравенств и др.) и геометрический смысл. Интегрируемость непрерывных функций. Вычисление двойного интеграла сведением его к повторным интегралам. Двойные интегралы от функций с разделяющимися переменными. Ограниченность функции как необходимое условие интегрируемости. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан перехода к полярным координатам. Приложения двойного интеграла: вычисление объёмов тел, площадей плоских фигур, массы плоских пластин и их координат центра масс. Тройной интеграл. Вычисление объёмов тел при помощи тройного интеграла.

II. Криволинейный интеграл. Понятие криволинейного интеграла от функции двух переменных (1-го рода) и его геометрический смысл. Вычисление криволинейных интегралов сведением к интегралу Римана (для явно и параметрически заданных функций). Приложения криволинейного интеграла: вычисление длины дуги плоской кривой, массы дуги (по известной плотности распределения массы) и координат центра тяжести. Существование других видов интегралов (тройных и m-кратных ($m > 3$), криволинейных по пространственным кривым, поверхностных и др.

Литература.

[4]: Раздел 6 (Функции нескольких переменных). Гл. 15 (Функции нескольких переменных), 15.5 (Двойные интегралы).

[5]: Гл. 13 (Интегрирование). §1 (Двойной интеграл). §2 (Замена переменных в двойном интеграле). §3 (Некоторые геометрические и физические приложения двойных интегралов). §4 (Криволинейные интегралы. Формула Грина). §6 (Тройные интегралы).

Контроль знаний: проверка выполнения домашнего задания.

13.1 Задачи на двойные интегралы

Вычисление интегралов в прямоугольных координатах:

1. *Случай криволинейной области, стандартной относительно оси Oy.* Пусть теперь область интегрирования D ограничена снизу и сверху, соответственно, двумя непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, а с боков – вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (изобразите на рисунке):

$$D = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}.$$

Тогда двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

2. *Случай криволинейной области, стандартной относительно оси Ox.* Пусть область интегрирования D ограничена слева и справа, соответственно, двумя непрерывными кривыми $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, а снизу и сверху – горизонтальными прямыми $y = c$ и $y = d$ (изобразите на рисунке):

$$D = \{(x, y) \,|\, x_1(y) \leq x \leq x_2(y),\ c \leq y \leq d\}.$$

Тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

№ 1. Вычислите двойной интеграл

$$I = \iint\limits_S (x^2 + y^2)dxdy,$$

где S – квадрат: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

№ 2. Вычислите двойной интеграл, если область интегрирования D – треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ и $C(3, 0)$:

$$\iint\limits_D (xy - 3y^2)dxdy.$$

№ 3. Вычислите интеграл, если область интегрирования D – треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 2)$ и $C(0, 3)$:

$$\iint\limits_D (xy + 3x^2)dxdy.$$

Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах.

Если область S определена в прямоугольных координатах неравенствами $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ (задана стандартно относительно оси Oy), то площадь этой области вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_S dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

Если же область S определена в прямоугольных координатах неравенствами $c \leq y \leq d$, $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$ (задана стандартно относительно оси Ox), то её площадь вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_S dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx.$$

№ 4. Запишите с помощью двойного интеграла и вычислите площадь, ограниченную линиями $xy = 4$, $y = x$, $x = 4$ (сделайте рисунок).

Указание: воспользоваться формулой $S = \iint\limits_S \underbrace{dxdy}_{ds}$.

№ 5. Запишите с помощью двойного интеграла и вычислите площадь, ограниченную линиями $y = x^2$, $4y = x^2$, $y = 4$ (сделайте рисунок).

№ 6. Запишите с помощью двойного интеграла и вычислить площадь, ограниченную линиями $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = \pm 2$ (сделайте рисунок).

№ 7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$ (сделайте рисунок).

№ 8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ и лежащей в полуплоскости $x \geq 0$ (сделайте рисунок).

Вычисление интегралов и площадей плоских фигур в полярных координатах.

Если область S определена в полярных координатах неравенствами $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$, то площадь этой области вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_S r dr d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr.$$

Замена переменных интегрирования при переходе от прямоугольных к полярным координатам в этом случае осуществляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

№ 9. Вычислите двойной интеграл, перейдя к полярным координатам по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

где D – половина круга радиуса R с центром в начале координат, лежащая в верхней полуплоскости $y \geq 0$.

№ 10. Вычислите $I = \iint\limits_D xydxdy$, если D – часть круга с центром в начале координат и радиусом 2, принадлежащая второй четверти.

№ 11. Вычислите двойной интеграл, перейдя к полярным координатам, если D – четверть круга $x^2 + y^2 = 1$, расположенная в первом квадранте:

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy.$$

№ 12. Вычислите двойной интеграл, перейдя к полярным координатам, если D – круг радиуса R с центром в начале координат:

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy.$$

№ 13. Вычислите двойной интеграл, если D – часть кольца $1 \leq r \leq 2$ в третьей четверти:

$$\iint\limits_D xydxdy.$$

Задачи на изменение порядка интегрирования.

№ 14. Постройте область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy$. Измените порядок интегрирования и вычислите площадь.

№ 15. Постройте область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} dy$. Измените порядок интегрирования и вычислите площадь.

№ 16. Постройте область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{y^2-4}^{0} dx$. Измените порядок интегрирования и вычислите площадь.

№ 17. Постройте область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy$. Измените порядок интегрирования и вычислите площадь.

Вычисление массы и центра массы (центра тяжести) плоской фигуры с помощью двойного интеграла.

Если на плоскости Oxy имеется материальная пластина в виде области D и по ней распределена масса M с известной функцией плотности распределения массы $\rho(x, y)$, то масса пластины вычисляется по формуле

$$M = \iint\limits_D \rho(x, y)dxdy,$$

а координаты центра масс пластины находятся по формулам:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\rho(x, y)dxdy}{M}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\rho(x, y)dxdy}{M}.$$

Если пластина однородная (т.е. $\rho \equiv const$), то формулы принимают вид

$$x_c = \frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}.$$

№ 18. Определите центр масс плоской однородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 4$, $y = 0$.

Вычисление объёмов тел с помощью двойного интеграла.

Объём цилиндроида, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y) > 0$, снизу плоскостью $z = 0$, с боков – цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит контур области S, вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_S f(x, y)dxdy.$$

№ 19. Вычислите объём тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (сделайте чертёж).

№ 20. Вычислите объём тела, ограниченного сверху поверхностью $z = x^2y$ и основанием в виде треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 1)$ (сделайте чертёж).

№ 21. Вычислите объём шара, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

13.2 Задачи на криволинейные интегралы 1-го рода

1. Если плоская кривая AB *задана явно* уравнением $y = y(x)$, где $x \in [a, b]$, а функция $y = y(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своей первой производной, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

2. Если плоская кривая AB *задана параметрически* уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in [t_0, t_1]$), где $x(t), y(t)$ – непрерывные функции, а $x'(t), y'(t)$ – кусочно-непрерывные функции, то справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

№ 22. Вычислите криволинейный интеграл 1-го рода

$$\int\limits_C (x - y)dl,$$

где C – отрезок прямой от точки $A(0, 0)$ до точки $B(4, 3)$.

№ 23. Вычислите криволинейный интеграл I рода $\int\limits_{AB} ydl$ по дуге AB параболы $y^2 = 2x$ от точки $(0, 0)$ до точки $(2, 2)$.

№ 24. Вычислите криволинейный интеграл I рода $\int\limits_{AB} xdl$ по дуге AB параболы $y = x^2$ от точки $(1, 1)$ до точки $(2, 4)$.

№ 25. Вычислите криволинейный интеграл I рода $\int\limits_{AB} y^2dl$ где AB – дуга окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

№ 26. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} \sqrt{x^2 + y^2}dl$ по кривой AB, заданной параметрическими уравнениями $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ.

13.1. Задачи на двойные интегралы.

№1. Решение. Сведём двойной интеграл к повторному:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2+y^2)dy = \int_0^1 \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Ответ: 2/3.

№ 2. Решение. Найдём уравнения прямых AB: $y = x$ и BC: $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$, тогда

$$\int_0^1 dy \int_y^{3-2y} (xy - 3y^2)dx = \int_0^1 \left(y\frac{x^2}{2} - 3y^2x\right)\Big|_y^{3-2y} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{2}(3-2y)^2 - 3y^2(3-2y) - \left(\frac{y^3}{2} - 3y^3\right)\right) dy =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{9}{2}y - 15y^2 + \frac{21}{2}y^3\right) dy = \left(\frac{9}{4}y^2 - 5y^3 + \frac{21}{8}y^4\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{8}.$$

Ответ: $-1/8$.

№ 3. Решение. Найдём уравнения прямых AB: $y = 2x$ и BC: $y = 3 - x$, тогда

$$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3-x} (xy + 3x^2)dy = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + 3x^2y\right)\Big|_{2x}^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{9}{2}x + 6x^2 - \frac{21}{2}x^3\right) dx = \left(\frac{9}{4}x^2 + 2x^3 - \frac{21}{8}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{13}{8}.$$

Ответ: 13/8.

№ 4. Решение. Сведём двойной интеграл к повторному:

$$S = \iint\limits_S dxdy = \int_2^4 dx \int_{\frac{4}{x}}^{x} dy = \int_2^4 \left(y\Big|_{\frac{4}{x}}^{x}\right) dx = \int_2^4 \left(x - \frac{4}{x}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 4\ln x\right)\Big|_2^4 = 6 - 4\ln 2.$$

Ответ: $6 - 4\ln 2$ (кв. ед.).

№ 5. Решение. В силу симметрии фигуры относительно оси Oy имеем

$$S = 2\iint\limits_{S_1} dxdy = 2\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{4y}} dx = 2\int_0^4 (2\sqrt{y} - \sqrt{y})dy =$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{y}dy = \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}.$$

Ответ: $32/3$ (кв. ед.)

№ 6. Решение. В силу симметрии фигуры относительно оси Oy имеем

$$S = 2\iint\limits_{S_1} dxdy = 2\int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{x^2} dy = 2\int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{4}\right) dx = 4.$$

Ответ: 4 (кв. ед.).

№ 7. Решение. $S = \iint\limits_{S} dxdy =$

$$= 2\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy = \int_{-1}^2 \left(y\Big|_{x^2}^{x+2}\right) dx = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^2 = \frac{27}{6} = 4,5.$$

Ответ: $4,5$ (кв. ед.).

№ 8. Решение.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_{\sin x}^{\cos x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx = (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.$$

Ответ: $\sqrt{2} - 1$ (кв. ед.).

№ 9. Решение. Так как $x^2 + y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$, то

$$I = \iint\limits_{G} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \iint\limits_{\substack{0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le\pi}} r^2 rdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} r^3 dr = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \cdot \int\limits_0^{R} r^3 dr = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi R^4}{4}$.

№ 10. Решение.

$$I=\iint\limits_G (r^2\cos\varphi\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi=\iint\limits_{\substack{0\le r\le 2\\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi}}\cos\varphi\sin\varphi\cdot r^3\,dr\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int\limits_0^2\frac{1}{2}\sin 2\varphi\cdot r^3\,dr=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,d\varphi\cdot\int\limits_0^2 r^3\,dr=$$

$$=\left(-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cdot\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^2\right)=-2.$$

Ответ: -2.

№ 11. Решение. Сделаем рисунок.

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint\limits_G e^{r^2}r\,dr\,d\varphi=\iint\limits_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}}e^{r^2}r\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1 e^{r^2}r\,dr=\frac{\pi}{4}(e-1).$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}(e-1)$.

№ 12. Решение. $\iint\limits_{\substack{0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le 2\pi}}e^{r^2}r\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R e^{r^2}r\,dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int\limits_0^R e^{r^2}r\,dr=$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^R=\pi(e^{R^2}-1).$$

Ответ: $\pi(e^{R^2}-1)$.

№ 13. Решение. Сделаем рисунок.

$$\iint\limits_{\substack{1\le r\le 2\\ \pi\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}}}(r\sin\varphi\cdot r\cos\varphi)r\,dr\,d\varphi=\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}d\varphi\int\limits_1^2 r^3\sin\varphi\cos\varphi\,dr=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin 2\varphi\,d\varphi\cdot\int\limits_1^2 r^3\,dr=-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_1^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4}=\frac{15}{8}.$$

Ответ: $15/8$.

№14. Решение.

$$S=\int_0^a dy\int_y^a dx=\int_0^a (a-y)dy=\left(ay-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^a=\frac{a^2}{2}.$$

№15. Решение. Здесь придётся разбить область на две части:

$$\int_0^1 dy\int_0^y dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2-y}} dx=\int_0^1 ydy+\int_1^2\sqrt{2-y}dy=$$

$$=\frac{y^2}{2}\Big|_0^1-\int_1^2\sqrt{2-y}d(2-y)=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}(2-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}.$$

Ответ: 7/6 (кв. ед.).

№ 16. Решение. $S=\int\limits_{-4}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{4+x}}^{0}dy=\dfrac{16}{3}.$

Ответ: 16/3 (кв. ед.).

№ 17. Решение. $S=\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{\frac{y^2}{4}}dx+\int\limits_4^8 dy\int\limits_0^{8-y}dx=\dfrac{40}{3}.$

Ответ: 40/3 (кв. ед.).

№ 18. Решение. Найдём интеграл

$$\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{x^2}dy=\int\limits_0^4 x^2dx=\frac{64}{3}.$$

Найдем теперь интегралы

$$\iint\limits_D xdxdy=\int\limits_0^4 xdx\int\limits_0^{x^2}dy=\int\limits_0^4 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^4=64,$$

$$\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{x^2}ydy=\int\limits_0^4\frac{x^4}{2}dx=\frac{x^5}{10}\Big|_0^4=\frac{2}{5}\cdot 256,$$

Тогда

$$x_c=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}=3,\quad y_c=\frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}=\frac{24}{5}=4,8.$$

Ответ: центр масс имеет координаты $(3;4,8)$.

№ 19. Решение. Это тело ограничено снизу плоскостью $z = 0$, сверху – параболоидом $z = x^2 + y^2$, с боков – вертикальными плоскостями $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$. Область интегрирования S (проекция тела на плоскость Oxy) имеет вид треугольника, ограниченного прямыми $y = 4 - x$, $x = 0$, $y = 0$ (сделайте рисунок треугольника S на плоскости Oxy, чтобы правильно расставить пределы интегрирования в повторном интеграле). Опишем область S: $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4 - x$, тогда

$$V = \iint\limits_{S} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\substack{0\le x\le 4\\ 0\le y\le 4-x}} (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{4-x} (x^2 + y^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^4 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{4-x} dx = \int\limits_0^4 \left(-\frac{4}{3}x^3 + 8x^2 - 16x + \frac{64}{3} \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 8x^2 + \frac{64}{3}x \right) \Big|_0^4 = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3}.$$

Ответ: $42\frac{2}{3}$ (куб. ед.).

№ 20. Решение. Уравнение прямой OB: $y = x/2$, тогда

$$V = \iint\limits_{S} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\substack{0\le x\le 2\\ 0\le y\le \frac{x}{2}}} x^2 y dxdy = \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^{\frac{x}{2}} ydy =$$

$$= \int\limits_0^2 x^2 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{\frac{x}{2}} \right) dx = \frac{1}{8} \int\limits_0^2 x^4 dx = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$ (куб. ед.).

№ 21. Решение. В силу симметрии шара относительно всех трёх координатных плоскостей найдём восьмую часть объёма шара (ту, например, что расположена в первом октанте $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$). Найдём уравнение сферы в явном виде, выразив из уравнения z через x и y: $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$. Тогда

$$\frac{V}{8} = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x\ge 0,\ y\ge 0}} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}dxdy = \iint\limits_{\substack{0\le r\le R\\ 0\le \varphi\le \frac{\pi}{2}}} \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - r^2} d(R^2 - r^2) = \frac{\pi R^3}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{4\pi R^3}{3}$ (куб. ед.).

№ 22. Решение. Сделаем чертёж. Уравнение отрезка прямой AB имеет вид $y = \dfrac{3}{4}x$, где $0 \le x \le 4$ (кривая AB задана явно). Воспользуемся формулой:

$$\int\limits_{AB} f(x,y) dl = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

$$\int\limits_C (x - y) dl = \int\limits_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right) \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} dx = \frac{5}{16} \int_0^4 x dx = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{2}$.

№ 23. Решение. Сделаем рисунок. Найдём явное уравнение дуги AB: $y = \sqrt{2x}$, тогда $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$, дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$. Имеем

$$\int\limits_{AB} f(x,y) dl = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int\limits_0^2 \sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} dx = \int\limits_0^2 \sqrt{2x + 1} dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

№ 24. Решение. Сделаем рисунок. Вычислим $y' = 2x$, тогда

$$\int\limits_{AB} x dl = \int\limits_1^2 x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int\limits_1^2 x \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int\limits_1^2 x \sqrt{1 + 4x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int\limits_1^2 x \sqrt{1 + 4x^2} d(1 + 4x^2) = \frac{1}{12}(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{12}(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}).$$

Ответ: $\dfrac{1}{12}(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}})$.

№ 25. Решение. Сделаем рисунок. Так как дуга AB задана параметрически, то воспользуемся соответствующей формулой, где $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$:

$$\int\limits_{AB} y^2 dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin t)^2 \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt = \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi a^3}{4}$.

№ 26. Решение. Так как $x^2 + y^2 = a^2(1+t^2)$, $x'(t) = at\cos t$, $y'(t) = at\sin t$ и, следовательно, $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = at$, то

$$\int\limits_{AB} \sqrt{x^2+y^2}dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int\limits_0^{2\pi}(a\sqrt{1+t^2})atdt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}d(1+t^2) = \frac{a^2}{3}\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{3}\left((1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Ответ: $\dfrac{a^2}{3}\left((1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.

14 Зачетная работа

Зачёт по курсу «Основы высшей математики» проводится в письменной форме как зачётная работа по всем темам, изученным в 3-м семестре. Задание включает теоретические вопросы и задачи для решения (см. пункт ниже).

Студенты, не сдавшие зачёт, имеют возможность пересдачи в начале следующего семестра (февраль).

Зачёт выставляется по совокупным результатам (рейтингу) работы студента в течение семестра: с учётом зачетной и самостоятельных работ, посещаемости, выполнения домашних заданий, активной работы на семинаре, решения домашних контрольных работ, выступлений с докладами и прочих форм работы.

При подготовке к зачетной работе заранее и тщательно повторите пройденные в течение семестра темы. В первую очередь, повторите решения задач, которые разбирались на семинарских занятиях и были заданы на дом. Будьте готовы дать развёрнутые ответы на следующие теоретические вопросы.

14.1 Список теоретических вопросов для зачёта

1. Определения рационального, иррационального и действительного числа. Модуль действительного числа и его основные свойства. Операции объединения и пересечения двух множеств действительных чисел. Простейшие уравнения и неравенства с модулем.

2. Определение предела числовой последовательности. Понятие сходящейся (расходящейся) последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Возрастающие и убывающие последовательности. 2-й замечательный предел и число е.

3. Понятие функции одной действительной переменной. Область определения, область значений, график. Графики основных элементарных функций ($y = x^n$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и др.). Примеры неэлементарных функций. Ограниченные и неограниченные функции. Чётные и нечётные функции. Возрастающие и убывающие функции. Периодические функции.

4. Определение предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по Гейне (или по Коши). 1-й и 2-й замечательные пределы. Определение непрерывности функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. Непрерывность на множестве. Примеры непрерывных и разрывных функций.

5. Определение локального максимума (минимума), локального экстремума. Критические точки 1-го рода. Исследование функции одной переменной на локальные экстремумы с помощью производной.

6. Определение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. Геометрический и физический смыслы производной. Таблица производных основных элементарных функций. Уравнения касательной и нормали к графику функции в заданной точке. Производная 2-го (n-го) порядка.

7. Определение первообразной и неопределённого интеграла. Таблица неопределённых интегралов. Интегрирование по частям. Замена переменной интегрирования (на примерах).

8. Понятие определённого интеграла Римана как предела интегральной суммы. Геометрический смысл определённого интеграла. Основные свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле.

9. Понятие функции двух переменных. Область определения и множество значений (на примерах). Линии уровня. Определение предела функции двух переменных $z = f(x, y)$ в заданной точке $M_0(x_0, y_0)$. Частные производные 1-го и 2-го порядков функции двух переменных. Градиент.

10. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения. Порядок уравнения. Общее и частное решения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными (решение на примерах).

11. Понятие матрицы. Равные матрицы, квадратная, нулевая, единичная, обратная матрица. Основные операции над матрицами (умножение на число, сложение, умножение матрицы на матрицу, транспонирование). Определитель квадратной матрицы 1-3 порядков, его вычисление и основные свойства.

12. Метод определителей (формулы Крамера) и другие способы решения систем на примере систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

13. Способы задания прямой линии на плоскости: общим уравнением, уравнением в отрезках, уравнением с угловым коэффициентом, каноническим уравнением, параметрическими уравнениями. Направляющий вектор и нормаль к прямой. Условия пересечения, параллельности, совпадения, перпендикулярности прямых. Угол между двумя прямыми на плоскости.

14. Способы задания плоскости в пространстве. Нормаль к плоскости. Условия пересечения, параллельности, совпадения, перпендикулярности плоскостей. Угол между плоскостями.

15. Понятие двойного интеграла для функций двух переменных как предела интегральных сумм. Вычисление двойного интеграла сведением его к повторным интегралам (на примерах). Вычисление площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла.

16*. Понятие числового ряда. Частичная сумма ряда. Сходящийся и расходящийся ряд. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости. Признаки сравнения. Признаки Даламбéра и Кошú для положительных рядов. Гармонический ряд. Сходимость (расходимость) обобщённого гармонического ряда. Признак Лéйбница для знакочередующихся рядов.

17*. Вектор и основные операции над векторами (сложение, вычитание, умножение на число). Скалярное и векторное произведения векторов. Понятие коллинеарных и ортогональных векторов.[1]

14.2 Примеры заданий для зачётной работы

1. Что такое рациональное, иррациональное, действительное число? Выберите рациональные числа из списка: $3\sqrt{2}$; $1-\sqrt{3}$; $\dfrac{2}{5}$; $\ln e$; $\sqrt{196}$; $\pi - 1$; $0,8(3)$; $\log_2 3$; 3^π; $0,1234567...$; -3; e. Упростите число $0,(999)$.

2. Как определяется модуль (абсолютная величина) действительного числа? Решите уравнения $|x-3| = 5$, $|x^2-1| = 1$ и неравенства $|x+4| > 1$, $|x-2| \leq 3$.

3. Что такое пересечение (объединение) двух числовых множеств? Найдите пересечение и объединение множеств A и B, где

$$A = (-\infty, 2] \cup \{3; 5\} \cup (8, 9), \quad B = \mathbb{Z},$$

где $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

[1]Знак * означает, что вопросы рассматривались только на лекциях. Включение задач на эти темы в зачетную работу остается на усмотрение преподавателя.

4. Приведите определение предела числовой последовательности. Что такое сходящаяся (расходящаяся) последовательность? Выберите сходящиеся последовательности из списка ($n \in \mathbb{N}$) и объясните, почему они сходятся:

$$a_n = \frac{1}{n^3} - 1;\ b_n = \frac{n}{2};\ c_n = \frac{-n}{-n^2+6};\ x_n = \lg n;\ y_n = \sqrt{n^2 + 3\sqrt{n}};$$

$$z_n = \sqrt{5n} - 1;\ \delta_n = (-1)^n;\ p_n = 4^n;\ q_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

5. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\sqrt{n}}{5n+1}$. Является ли эта последовательность ограниченной (что такое ограниченная последовательность)?

6. Приведите определение функции $y = f(x)$, возрастающей на интервале (a, b). С помощью производной найдите промежутки возрастания функции $y = 3x^3 - 9x + 14$, $x \in \mathbb{R}$.

7. Сформулируйте определение периодической функции $y = f(x)$. Что такое главный период? Выберите из списка ниже периодические функции и найдите их главные периоды:

$$1)\, y = \operatorname{ctg} x;\ 2)\, y = \cos^2 x;\ 3)\, y = \sin 7x;\ 4)\, y \equiv 3;\ 5)\, y = 3x + 5;$$

$$6)\, y = \{x\},\ 7)\, y = \log_7 x,\ 8)\, y = \sin x - 2x.$$

8. Какая функция, по определению, называется нечётной (чётной)? Является ли функция $y = \operatorname{tg} 5x$ нечётной, четной? Как это проверить? Есть ли у её графика ось или центр симметрии?

9. Что такое наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (определение)? Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sin^2 x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$. При каких x они достигаются?

10. Сформулируйте неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (Коши). При каком условии оно обращается в равенство? С помощью данного неравенства найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{4}{x^2} + x^2$. При каких x оно достигается?

11. Сформулируйте определение предела функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ (по Гейне). Напишите 1-й и 2-й замечательные пределы и с их помощью найдите пределы

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\left(3x^2\sin\frac{1}{x^2}\right);\quad 2)\ \lim_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}.$$

12. Вычислите предел функции

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{3x+1}.$$

Является ли эта функция ограниченной на множестве $x \geq 1$ (что такое ограниченная функция)?

13. Используя второй замечательный предел, вычислите пределы

$$\text{а)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^x,\quad \text{б)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x.$$

14. Найдите предел функции

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right),\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}.$$

15. Постройте график функции $y = \begin{cases} -2x, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

Является ли эта функция непрерывной или имеет точки разрыва? Что такое непрерывная (в точке) функция? Если функция не является непрерывной, укажите точки разрыва.

16. Постройте график функции $y = \begin{cases} x+a, \text{ если } x < 0, \\ x^2, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$

Существуют ли значения a, при которых данная функция является непрерывной? Если нет, то укажите точки разрыва.

17. Что означает, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$? Что называется производной в точке $x = x_0$? Найдите производные 1-го и второго порядков у функции $y = 2^x$.

18. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

19. Известно, что производная функции $y = y(x)$, заданной параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, вычисляется по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Найдите производную y'_x функции, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = 5t - 2, \\ y = t^3 \quad (t \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

в точке $t = 0$.

20. Сформулируйте определение точки локального максимума и локального максимума. Что называется локальным экстремумом и каково необходимое условие экстремума? С помощью производной найдите локальные максимумы функции

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

21. Вычислите первый и второй дифференциалы функции $y = \cos 7x$.

22. Найдите то решение обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $y' + y^2 x = 0$, которое удовлетворяет начальному условию $y(1) = 2$.

23. Сформулируйте определение первообразной функции. Найдите неопределённый интеграл

$$\text{а)} \int \left(\frac{2}{x^3} - 5\sqrt[4]{x} \right) dx, \quad \text{б)} \int \sin^2 x \cos x dx.$$

Во втором случае сделайте замену $t = \sin x$.

24. Вычислите определённый интеграл

$$\int_{-4}^{6} |x - 1| dx.$$

25. Вычислите определённый интеграл, сведя его к табличному интегралу:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$$

26. Напишите формулу интегрирования по частям для определённого интеграла. Вычислите определённый интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

27. Что такое матрица, её размерность? Какие основные операции над матрицами вы знаете? Выражение $AB+2C$ является матрицей или числом? Чему равно это выражение, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

28. Найдите определитель матрицы, транспонированной к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Является ли матрица A вырожденной?

29. Методом определителей (используя формулы Крамера) найдите решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = -1, \\ -y + x = 2. \end{cases}$$

30. Используя метод определителей, найдите все решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y = -1, \\ -2y + 6x = 2. \end{cases}$$

31. Найдите, при каких значениях параметра a система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2ax - y = 3, \\ 2y + x = -1 \end{cases}$$

имеет: а) единственное решение; б) бесконечно много решений; в) не имеет решений.

32. Верно ли, что уравнение прямой, проходящей на плоскости через две заданные точки $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0?$$

Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(2, 1)$ и $B(-3, 1)$.

33. Что такое каноническое уравнение прямой, проходящей на плоскости через заданную точку параллельно заданному вектору? Что называется направляющим вектором прямой? Найдите направляющие векторы прямых

$$\frac{x+4}{-3}=\frac{y-6}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{a}=\frac{y}{2}.$$

При каком значении a прямые параллельны? Напишите общее уравнение первой из прямых.

34. Напишите каноническое уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(1,-2)$ параллельно вектору $\vec{e}\{3;-1\}$. Найдите параметрические уравнения этой прямой.

35. Верно ли, что уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ и $C(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=1?$$

Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M(-1,1,0)$, $N(1,0,-2)$ и $K(0,-1,1)$.

36. Проверьте, являются ли параллельными плоскости

$$2x-y+z+2=0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{1}=1\ ?$$

(Ответ следует обосновать). Если нет, то чему равен угол между ними?

37. Что называется общим уравнением плоскости в пространстве? Что такое нормаль к плоскости? Найдите угол между плоскостями $x-3y-z+5=0$ и $-2x+z=0$.

38. При каком условии плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ параллельны? совпадают? перпендикулярны? Определите взаимное расположение плоскостей $x-2y+z-1=0$ и $4y-2x-2z=0$.

39. Пусть функция двух переменных $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y). Что такое градиент функции (приведите определение). Найдите градиент функции $z=\cos(3x-y)$ в точке $(0,1)$.

40. Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке (x, y). Напишите формулы вычисления первого и второго дифференциалов этой функции (в общем виде). Найдите dz и d^2z, если $z = 2xy^3 - 6x^2 - 5$.

41. С помощью двойного интеграла найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$, $y = x^2$, $y = 0$ и лежащей в правой полуплоскости $x \geq 0$.

42. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} dx.$$

(сделайте рисунок). Верно ли, что в результате получится

$$\int_0^1 dx \int_0^{2-x^2} dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{x^2} dy\ ?$$

43*. Выполняется ли для числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$ необходимое условие сходимости? Является ли данный ряд обобщённым гармоническим или геометрическим? Сходится ли этот ряд?

44*. Приведите определение сходящегося числового ряда. Сформулируйте признак Даламбера и с его помощью исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2017}{n!}.$$

45*. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, а скалярное произведение векторов $(\vec{a}, \vec{b}) = 8$.

46*. Что такое векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$? Приведите определение. Найдите векторное произведение векторов $\vec{a} = \{-1; 0; 2\}$ и $\vec{b} = \{3; -1; 5\}$.

47*. Что такое коллинеарные векторы? ортогональные векторы? Проверьте, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a} = \{-1; 0; 2\}$ и $\vec{b} = \{3; -1; \frac{3}{2}\}$?

ПРИЛОЖЕНИЕ: Для чего политологу нужно изучать математику?

Выслушаем мнения независимых экспертов и авторитетных профессионалов о том, зачем людям гуманитарных профессий важно изучать математику.

1. Михаил Васильевич Ломоносов (1711–1765, первый русский учёный-естествоиспытатель мирового значения, энциклопедист, химик и физик; его молекулярно-кинетическая теория тепла во многом предвосхитила современное представление о строении материи и многие фундаментальные законы, в числе которых одно из начал термодинамики; заложил основы науки о стекле. Астроном, приборостроитель, географ, металлург, геолог, поэт, филолог, художник, историк и генеалог, поборник развития отечественного просвещения, науки и экономики. Разработал проект Московского университета, впоследствии названного в его честь. Открыл наличие атмосферы у планеты Венера. Статский советник, профессор химии (с 1745), действительный член Санкт-Петербургской Императорской и почётный член Королевской Шведской академий наук):

«*Математику только затем учить надо, что она ум в порядок приводит*».

2. Преподаватель высшей математики в ВШЭ Ирина Аскольдовна Хованская:

«*Студентов на факультет политологии не отбирают по уровню знаний математики, но это совсем не значит, что все они слабо подготовлены. Они очень разные: есть сильные ребята, а есть те, для кого целью было сдать ЕГЭ по математике выше порога отсечения, то есть не получить неудовлетворительную отметку*».

«*В политологии есть много разделов, в которых применяются математические методы, причём довольно сложные. Если вы возьмёте современный учебник по политологии, то там будут не только формулы и вычисления, но и довольно-таки сложные математические конструкции. А в научных статьях бывают по-настоящему сложные модели*».

«*Задача математического курса — не столько научить решать* *конкретные задачи или доказывать теоремы, сколько показать те области политологии, где применяется математика... показать перспективу для применения математических знаний в разных сферах».*

«...математика является для политологов инструментом».

«...математика — серьезная наука. Студенты-политологи не занимаются математическими исследованиями, это невозможно, для этого им нужно еще одно образование».

«С одной стороны, в России есть активная математическая жизнь, а с другой, — преподавание математики не-математикам превращается в какое-то неизбежное зло. Раньше в технических вузах курс математического анализа использовался как дополнительный инструмент проверки способности к освоению материала: если человек может два года изучать математический анализ и сдавать все экзамены и зачёты, значит, он способен учиться».

«У меня дома на холодильнике висит магнит с фразой Уинстона Черчилля: «Никогда, никогда, никогда не сдавайтесь!» ...эту фразу я читаю каждое утро.

3. Николай Перов, 29 лет, блогер, автор сайта, посвящённого развитию личности:

« ... я уверен, что математика, точнее навыки математического мышления, нужны всем и каждому».

«Математика – инструмент познания мира. Язык, на котором говорит природа, мы успешно можем перевести на язык математики и осознать структуру взаимосвязей какого-либо явления. И после того как мы эти связи формализуем, мы можем строить модели, предсказывать будущие состояния явлений, которые этими моделями описываются, только лишь на бумаге или в памяти вычислительных машин!»

«Математика применяется в моделировании и прогнозах. Благодаря математике мы имеем все доступные нам сегодня технологии, не подвергаем нашу жизнь бессмысленной опасности, строим города, осваиваем космос и развиваем культуру! Без нее мир был бы совсем иным».

«Математика позволяет развить некоторые важные умственные качества. Это аналитические, дедуктивные (способность к обобще-

нию), критические, прогностические (умение прогнозировать, мыслить на несколько шагов вперед) способности. Также эта дисциплина улучшает возможности абстрактного мышления (ведь это абстрактная наука), способность концентрироваться, тренирует память и усиливает быстроту мышления. Вот сколько всего вы получаете! Вы или ваши дети могут многого лишиться, если вы не будете уделять этому предмету должного внимания».

«Математика помогает человеку развить следующие интеллектуальные способности.

– Умение обобщать, рассматривать частное событие в качестве проявления общего порядка. Умение находить роль частного в общем.

– Способность к анализу сложных жизненных ситуаций, возможность принимать правильное решение проблем и определяться в условиях трудного выбора.

– Умение находить закономерности.

– Умение логически мыслить и рассуждать, грамотно и чётко формулировать мысли, делать верные логические выводы.

– Способность быстро соображать и принимать решения.

– Навык планирования наперед, способность удерживать в голове несколько последовательных шагов.

– Навыки концептуального и абстрактного мышления: умение последовательно и логично выстраивать сложные концепции или операции и удерживать их в уме».

«Не стоит думать, что вам от природы это не дано, что ваше призвание – это гуманитарные науки, и точные предметы вы учить не в состоянии. Когда кто-то говорит, что у него гуманитарный склад ума и поэтому считать, читать формулы и решать задачи он не может в принципе, как бы не хотел, то знайте, что это такая вот изящная попытка оправдать факт отсутствия развитости математических способностей. Не их отсутствия! А только того, что эти навыки по каким-то причинам не получили должного развития».

«Ум человека – вещь универсальная, предназначенная для решения самых разных задач. Конечно, это утверждение имеет свои пределы: каждый, в силу особенностей своих врожденных и приобретенных свойств мышления, имеет определенные склонности к освоению разных наук. К тому же специализация чаще всего требует знания чего-то одного: сложно быть и отличным математиком, химиком,

адвокатом, педагогом в одном (не все мы Ломоносовы). Всегда придется из чего-то выбирать. Но базовыми навыками математического мышления способен овладеть каждый! Для кого-то это просто будет сложнее, для кого-то легче. Но это под силу всем. И как я уже говорил, это нужно для сбалансированного развития вашего ума. Из того, что вам интересны, например, литература или психология, не следует то, что математика вам не нужна и вы просто от природы не способны ей хоть как-то овладеть!

Одно другого не исключает, а, напротив, гармонично дополняет. «Гуманитарный склад ума» в контексте невозможности овладения точными науками — это просто один большущий нонсенс и попытка оправдать нежелание овладеть теми навыками, которые даются с бо́льшим трудом, чем другие».

«Без поддержки в виде математических методов прогнозирования, моделирования и анализа (хотя бы на примитивном уровне, смотря какой у вас бизнес) успеха в организации собственного дела достичь сложно. Исходя из личной статистики, могу сказать, что наибольшего успеха в бизнесе добиваются, как правило, выпускники технических, математических вузов.

Дело не только в знании каких-то специальных методик расчетов, ведь никогда не поздно это освоить в случае надобности. Ключ в определенной организации ума. Бизнес — это высоко упорядоченная система, построение которой требует от её создателя определенных интеллектуальных навыков, труктурированного мышления, умения обобщать и выводить взаимосвязи. Изучение точных наук, как известно — развивает эти навыки».

«Математика и другие точные науки очень важны как для развития человечества в целом, так и для интеллектуального совершенствования конкретного индивида. Конечно, сбалансированное умственное развитие личности подразумевает освоение не только точных предметов, но и гуманитарных дисциплин. Чтение качественной литературы, например, также необходимо для вас, если вы хотите развиваться.

Но одного этого недостаточно. Хотелось бы дополнить формулировку известного утверждения «Если хочешь стать умным – нужно много читать», прибавив к этому: «– и заниматься математикой». Иначе эффект от одного лишь чтения книг будет похож на тело без *скелета, или здание без каркаса. Одному без другого сложно.*

Именно поэтому многие гуманитарии, как бы хорошо они не разбирались в своей предметной области, страдают спутанностью мышления и отсутствием трезвой рассудительности, а многие заядлые математики и технари замыкаются в мире абстрактных формул и расчётов, теряя связь с реальным миром.

Золотое правило – всё хорошо в меру, удел гармонично развитого ума, универсальность на самом базовом уровне! Все вместе: и книги, и математика! Это не проповедь во славу дилетантизма, нет, в своей специализации вы должны быть профессионалом и узким специалистом, знатоком именно своего дела. Но что касается вашей базовой эрудиции и знаний, тут должно быть от всего понемножку.

Я считаю, что идея школьного образования и преподавания на начальных курсах ВУЗов отвечает этому принципу универсальности (только идея, о том же, как это реализуется на практике, я не берусь рассуждать). Я бы крайне негативно отнёсся к усилению специализации начального и среднего образования, считая, что подрастающему индивиду надо дать как можно больше всего из разных сфер, а когда он это получит, пусть потом выбирает то, что ему ближе!»

4. Владимир Андреевич Успенский, доктор физико-математических наук, профессор мехмата МГУ.

«*Математика является значительной, очень важной частью общечеловеческой культуры. Как часть человеческой культуры она, по-моему, нужна всем, в том числе, и гуманитариям*».

«*Мне кажется, главная цель обучения математике – психологическая. Задача, конечно, не том, чтобы изменить психологию, но, может быть, создать некую новую психологию, как бы параллельную обычной гуманитарной. Я бы назвал четыре такие цели. Первое – это дисциплина мышления; второе – умение отличать истину от лжи; третье – умение отличать смысл от бессмыслицы; и четвертое - умение отличать понятное от непонятного*».

«*Как было очень правильно написано в одной из методических книг по математике: сначала ты пойми, что я тебе говорю, а потом я тебе объясню, зачем это нужно*».

«*...в дни моей молодости всех моряков, которые плавают на реальных судах, учили обязательно на парусных судах, хотя парусные* *суда реально не применяются. Это считалось необходимой частью морской подготовки, это был необходимый тренинг. Так вот таким же тренингом мышления, наведением порядка в мозговых извилинах является и математика».*

«Математика есть наилучший тренажер для воспитания мышления и наиболее демократичный предмет. Хорошо известен такой факт – он часто воспроизводится в разных учебниках. Это рассказывают иногда про великого математика Архимеда и сиракузского царя Гиерона, или про великого математика Евклида и египетского царя Птолемея. Царь выразил желание изучать геометрию, и математик начал его обучать. Царь довольно быстро заметил, что дети, которых обучают математике, обучаются тем же самым понятиям и теоремам в той же последовательности. Он выразил неудовольствие. Как же так, он же все-таки царь, его надо учить по-другому. И тогда математик по преданию ответил: "Нету царского пути в геометрии". Оттого, что в математике нет царского пути и математика демократична, может случиться так, что школьник говорит верно, а академик неверно. И это очевидно всем. В гуманитарных науках невозможно себе представить, чтобы кто-то признал высказывание гуманитарного академика неверным, потому что критерий истины и лжи, к сожалению, немножко другой, скажем так, несколько более слабый. И мы, математики, хотели бы этот критерий истины для гуманитариев укрепить».

Математика – она как пропуск, как дверь во все остальные науки. А человек, который испугался математики в младших классах, называется гуманитарием. Как в одной из наших передач сказал очень хороший психолог Вадим Ротенберг: возникает обученная беспомощность. Человек уже забыл элементарные преобразования, он плохо знает таблицу умножения и как только появляются формулы и символы, человек все это отталкивает - я гуманитарий. Здесь и происходит разделение. Очень простая мысль (но всякая глубокая мысль и должна быть простой), что деление на физиков и лириков, если оно существует, оно как раз и происходит в школе по этому критерию. Воспринимает человек математику или не воспринимает. Если воспринимает, он при этом грубом делении - физик, естественник. А если он не воспринимает, то идет в гуманитарии.

Кстати, это тоже интересный вопрос: относится математика к естественным наукам или нет? Один из самых крупных математиков современности академик Владимир Арнольд категорически утверждал и считал, и пропагандировал, что математика является частью физики. Математика – это естественная наука, которая описывает физический мир. Но есть и другая точка зрения, несколько более неожиданная. Я впервые столкнулся с ней много лет назад, когда некоторые мои коллеги возвращались с международных общих научных конференций из Индии. На конгрессах индийских ученых, при грубом делении на две большие секции естественных наук и гуманитарных, математика относилась к гуманитарным наукам. И математики, мои коллеги, с удивлением обнаруживали, что они сидят рядом с искусствоведами. При всем моем уважении и к Владимиру Игоревичу Арнольду, и к индийской культуре, я думаю, что я равным образом уважаю оба феномена. Я думаю, что математика имеет черты и того, и другого. И это тоже очень существенная вещь. Я не думаю, что она выполняет эту роль, но могла бы выполнять роль объединения этих двух культур. Очень надеюсь, что в будущем будет выполнять.

5. Ольга Митина, кандидат психологических наук, старший научный сотрудник факультета психологии МГУ.

«Математика – это новый язык, который расширяет ви́дение. Как владение иностранными языками расширяет картину мира любого человека, так и пользование языка математики расширяет картину мира ученого-гуманитария. И позволяет смотреть без страха на то, что делается в других дисциплинах – в физике или химии, и заимствовать модели, проводить аналогии и так далее. То есть быть открытым к новому опыту, тому который дают другие науки. Это ещё один язык, ещё одна степень свободы, которая позволят учёному чувствовать себя более устойчиво в океане науки».